

2002RP-18

**Partage des coûts et tarification
des infrastructures
Les méthodes de partage de coûts
Un survol**

Marcel Boyer, Michel Moreaux, Michel Truchon

Rapport de projet
Project report

Montréal
Novembre 2002
Révisé en juin 2003

© 2002 Marcel Boyer, Michel Moreaux, Michel Truchon. Tous droits réservés. *All rights reserved.* Reproduction partielle permise avec citation du document source, incluant la notice ©.
Short sections may be quoted without explicit permission, if full credit, including © notice, is given to the source



CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

- École des Hautes Études Commerciales
- École Polytechnique de Montréal
- Université Concordia
- Université de Montréal
- Université du Québec à Montréal
- Université Laval
- Université McGill
- Ministère des Finances du Québec
- MRST
- Alcan inc.
- AXA Canada
- Banque du Canada
- Banque Laurentienne du Canada
- Banque Nationale du Canada
- Banque Royale du Canada
- Bell Canada
- Bombardier
- Bourse de Montréal
- Développement des ressources humaines Canada (DRHC)
- Fédération des caisses Desjardins du Québec
- Hydro-Québec
- Industrie Canada
- Pratt & Whitney Canada Inc.
- Raymond Chabot Grant Thornton
- Ville de Montréal

Partage des coûts et tarification des infrastructures

Les méthodes de partage de coûts

Un survol*

Marcel Boyer[†], Michel Moreaux[‡], Michel Truchon[§]

Résumé / Abstract

Dans le présent document, on entreprend une présentation systématique des méthodes de partage qu'on retrouve dans la littérature économique. On les regroupe en trois catégories : les règles de proportionnalité, celles qui sont inspirées de la théorie des jeux coopératifs et celles de répartition séquentielle (serial cost sharing). Chacune des méthodes présentées est illustrée à l'aide d'un exemple, celui d'un gazoduc qui relierait le Saguenay-Lac-Saint-Jean et la Beauce à Montréal, en passant par Québec, capable de desservir ces trois régions.

In this paper, we present the different cost sharing methods one can find in the economic literature. We regroup the methods into three sets : the proportional methods, the cooperative game theory methods and the serial cost sharing methods. All those methods are presented through the stylized example of a pipeline connecting the Saguenay-Lac-Saint-Jean and Beauce regions to Montreal, through Quebec city, capable of satisfying the needs of those three regions.

Mots clés: Partage des coûts, tarification, infrastructures, jeux de coûts.

Keywords: *Cost sharing, Pricing, Infrastructures, Cost Games.*

* Cette version du rapport a été remise au Ministère des Finances du Québec (MFQ) dans le cadre d'un partenariat de recherche entre le MFQ et le CIRANO. Les auteurs tiennent à remercier le Ministère pour son soutien financier. Il va de soi qu'ils sont les seuls responsables des opinions et analyses contenues dans ce document, qui ne représentent pas nécessairement celles du CIRANO ou du MFQ. Les auteurs acceptent également la responsabilité de toute erreur qui aurait pu se glisser dans le texte.

[†] CIRANO et Département de sciences économiques, Université de Montréal

[‡] LEERNA, IDEI, IUF, Université de Toulouse I

[§] CIRANO, CIRPÉE et Département d'économique, Université Laval, **auteur principal**

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Le problème de la répartition des coûts communs | 2 |
| 2.1 | Les demandes | 2 |
| 2.2 | Fonctions de coût | 3 |
| 2.3 | Règle de répartition | 5 |
| 2.4 | Exemple | 6 |
| 3 | Les méthodes de répartition | 9 |
| 3.1 | Les règles de proportionnalité | 10 |
| 3.1.1 | La règle du coût moyen | 12 |
| 3.1.2 | La méthode des bénéfices résiduels | 13 |
| 3.1.3 | Les méthodes comptables | 14 |
| 3.2 | Les méthodes inspirées de la théorie des jeux coopératifs | 16 |
| 3.2.1 | La tarification au coût marginal | 18 |
| 3.2.2 | La tarification à la Aumann-Shapley | 20 |
| 3.2.3 | La méthode Shapley-Shubik | 22 |
| 3.2.4 | Le nucléole | 25 |
| 3.2.5 | Le coeur (noyau) | 26 |
| 3.3 | La répartition séquentielle | 28 |
| 3.3.1 | Cas des demandes unidimensionnelles | 28 |
| 3.3.2 | Cas des demandes multidimensionnelles | 31 |
| 4 | Conclusion | 34 |
| | Annexes | 35 |
| A | Sommaire des exemples | 35 |
| B | Notation | 37 |
| C | La fonction \hat{c} | 37 |
| D | Recherche du nucléole | 39 |
| E | Répartition selon les coûts incrémentaux | 41 |
| F | Répartition séquentielle et coûts incrémentaux | 45 |
| | Références | 47 |

1 Introduction

Dans Boyer, Moreaux et Truchon -ci-après BMT- (2002a)¹, on a insisté sur l’omniprésence des problèmes de partage de coûts dans nos sociétés modernes. On l’a illustré avec plusieurs exemples concrets. On a également présenté succinctement trois méthodes de partage dans le cadre de deux problèmes concrets. Dans le présent document, on entreprend une présentation systématique des méthodes de partage qu’on retrouve dans la littérature économique. On les regroupe en trois catégories : les règles de proportionnalité, celles qui sont inspirées de la théorie des jeux coopératifs et celles de répartition séquentielle (serial cost sharing).

On commence par définir le problème de la répartition des coûts communs de la manière la plus générale possible. Un problème peut impliquer des clients d’une entreprise ou d’un organisme quelconque, les divisions d’une entreprise, les partenaires d’un projet, les missions d’un organisme, les divers usages d’un équipement, etc. On les désignera sous le terme générique d’*entités*. Ces dernières ont des besoins qui peuvent porter sur un ou plusieurs biens, qui peuvent être différents d’une entité à l’autre, et qui peuvent être publics ou privés. Ces besoins peuvent aussi porter sur les caractéristiques d’un équipement, pourvu qu’ils puissent être représentés par des nombres réels, un par caractéristique. Ce problème très général est illustré par un exemple fictif, celui d’un gazoduc qui relierait le Saguenay-Lac-Saint-Jean et la Beauce à Montréal, en passant par Québec, capable de desservir ces trois régions. Chacune des méthodes présentées est illustrée à l’aide de cet exemple.

Le problème de la répartition des coûts communs est défini dans la prochaine section. Les méthodes de répartition sont présentées dans la section 3. Les notations sont introduites au fur et à mesure des besoins. On trouve un récapitulatif et certains détails plus techniques en annexe.

L’analyse rigoureuse des règles de partage de coûts et la diversité de ces règles montrent qu’il n’y a pas une règle universellement appropriée, qui pourrait être appliquée dans toute situation. Le choix d’une méthode en particulier devrait se faire en fonction de l’ensemble

¹BMT (2002a) est le document [1] de la présente série sur le partage des coûts et la tarification des infrastructures. La liste de ces documents est donnée en annexe.

des propriétés qu'elle satisfait. Il est donc important de s'assurer d'une bonne compréhension de la nature et des propriétés des diverses règles. Elle pourra faciliter la coordination des partenaires dans l'acceptation d'un ensemble restreint de règles de partage. L'étude des propriétés des règles fait l'objet de BMT (2002b).

2 Le problème de la répartition des coûts communs

On suppose qu'il y a n entités concernées par un projet bien défini. Ces entités sont repérées par un indice i (parfois j lorsqu'il faut distinguer entre deux entités). Elles forment un ensemble $N = \{1, \dots, n\}$. Ces entités ont des besoins, généralement différents, qui peuvent prendre des formes diverses. Dans certains cas, les besoins ou demandes peuvent être exprimés par un nombre réel. On examine d'abord ce cas. On présente ensuite le cas plus général où les demandes, plus complexes, sont exprimées sous forme de suites ou vecteurs de paramètres.

2.1 Les demandes

Dans les situations les plus simples, les besoins des n entités portent sur un même bien privé homogène. Elles peuvent être représentés par des nombres réels non négatifs q_1, \dots, q_n . On convient alors d'indicer les entités par ordre croissant de leurs besoins : $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$. On désigne ces quantités par le vecteur $Q = (q_1, \dots, q_n)$. La demande totale est donnée par $\sum_{i=1}^n q_i$. On dit alors que les *demandes sont unidimensionnelles*.

De façon plus générale, les besoins ou demandes des entités comportent plusieurs caractéristiques qui peuvent être communes ou propres aux entités. On suppose que la demande de l'entité i peut être décrite à l'aide de m_i caractéristiques, par exemple la hauteur, la largeur et la longueur d'un tunnel ou les volumes de gaz requis respectivement en été et en hiver. On suppose de plus que ces caractéristiques peuvent être représentées par des nombres réels non-négatifs. La demande de l'entité i peut donc être représentée par un vecteur $q_i = (q_{i1}, \dots, q_{im_i})$ dont les éléments sont les valeurs des différentes caractéristiques de cette demande.

On pose $m = \sum_{i=1}^n m_i$. La suite des demandes des différentes entités est notée $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Il s'agit d'une suite de m nombres. Dans la mesure où les biens peuvent avoir un caractère public, la demande globale n'est plus nécessairement donnée par la sommation des demandes individuelles, qui peuvent d'ailleurs comporter des nombres de biens différents d'une entité à l'autre. On parle de *demandes multidimensionnelles* pour ce contexte plus général.²

Comme exemples de cette classe plus générale de problèmes, mentionnons :

- la construction d'un réservoir hydraulique dont les différents usages exigeraient normalement des capacités et des configurations fort différentes,
- la construction d'une route dont la capacité portante de la chaussée et la taille des viaducs sont largement déterminées par la nécessité d'acheminer un trafic de poids lourds, alors que le seul trafic automobile n'exigerait que des ouvrages plus légers,
- la construction d'un réseau de distribution (gaz, électricité, communications, routes) dans lequel les capacités peuvent différer d'un segment à l'autre alors que les demandes peuvent différer d'une période à une autre ainsi que d'un segment à un autre.

Dans ce document, on suppose que la demande Q est donnée une fois pour toutes, i.e. qu'elle est inélastique. On se place aussi dans un contexte où les entités n'ont pas d'autre choix que de se mettre ensemble pour répondre à leurs besoins, que ce soit pas intérêt ou décret. De plus, l'ampleur des besoins d'une entité n'est pas affectée par la part du coût qui lui est éventuellement imputée. Bon nombre de situations se présentent de cette façon dans la réalité.

2.2 Fonctions de coût

La formulation du problème est complétée par l'introduction d'une fonction de coût, i.e. d'une règle qui attribue des coûts aux valeurs possibles des demandes. Cette fonction est notée C . De façon précise, on désigne par $C(Q)$ le coût de satisfaire à une demande Q .

²Pour plus de détails sur la représentation de ce type de demandes, voir Tédjédo et Truchon (2002).

On aura aussi besoin des coûts des demandes de sous-ensembles d'entités S . Comme C est défini sur l'ensemble des suites Q , qui sont de dimension m , il faut mettre les demandes individuelles et celles de tout sous-ensemble d'entités sous cette forme pour pouvoir leur appliquer C . On représente la demande d'un sous-ensemble S d'entités par Q^S , qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des entités de S , sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des entités de S est donc $C(Q^S)$. Comme cas particulier, on a $C(Q^{\{i\}})$, qui est le *coût de faire cavalier seul*. En fait, on aura besoin du coût de faire cavalier seul pour différentes demandes Q . Aussi, on définit les fonctions de coût de faire cavalier seul pour les différentes entités. Elles sont notées c_i et définies par :

$$c_i(q_i) = C(Q^{\{i\}}), \quad i = 1, \dots, n$$

où q_i est, rappelons-le, la composante de Q qui concerne l'entité i . On suppose que C est non décroissante. Une augmentation de la demande de la part d'une ou plusieurs entités ne peut entraîner une diminution de coût. Elle pourrait cependant laisser les coûts inchangés. C'est le cas s'il est possible de répondre à une plus grande demande de la part d'une entité sans changer la production. Par contre, on suppose que la fonction C induit des fonctions c_i croissantes.

Il peut y avoir plusieurs façons de satisfaire à une demande, i.e. de traduire une demande en un projet commun. Différents projets peuvent avoir des coûts différents. Le nombre $C(Q)$ doit s'entendre comme le coût du projet qui permet de répondre aux besoins exprimés de la manière la moins coûteuse possible. Ce meilleur projet peut changer avec la demande elle-même et les conditions du marché comme les prix. Rappelons-nous cependant qu'on suppose Q donné.

On désigne par $\alpha(Q)$ un projet capable de répondre à la demande Q et par $A(Q)$ l'ensemble de tous ces projets. Un projet $\alpha(Q)$ est généralement défini par une liste de caractéristiques qui peuvent plus ou moins correspondre à celles qui servent à exprimer les demandes. La fonction α peut aussi être vue comme une fonction d'agrégation des demandes

des entités en demande globale. Soit $c(\alpha(Q))$ le coût d'un projet $\alpha(Q)$. La fonction de coût est alors définie par :

$$C(Q) = \min_{\alpha(Q) \in A(Q)} c(\alpha(Q))$$

Un cas particulier est celui où les demandes des entités portent toutes sur une même liste de biens privés. La fonction α est alors définie de façon unique par $\alpha(Q) = \sum_{i=1}^n q_i$. Autrement dit, la demande globale est la somme des demandes individuelles. La fonction C est alors de la forme

$$C(Q) = c\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)$$

et on dit qu'elle est *homogène*.

Un autre cas particulier est celui où les entités demandent encore les mêmes biens mais où ces derniers sont des *biens publics purs*. La quantité consommée par une entité ne restreint pas la consommation des autres. La fonction α est encore définie de façon unique, cette fois par $\alpha(Q) = (\max_i y_{i1}, \dots, \max_i y_{ik})$ où k est le nombre de ces biens. Autrement dit, la quantité à produire de chaque bien est la quantité maximale demandée par les entités. C est alors de la forme :

$$C(Q) = c\left(\max_i y_{i1}, \dots, \max_i y_{ik}\right)$$

La dérivée de la fonction C par rapport à un de ses arguments, lorsqu'elle existe, est le *coût marginal* de la quantité correspondante. Pour des changements discrets de quantité, on parlera plutôt de *coût incrémental*. Par exemple, $C(Q^{S \cup \{i\}}) - C(Q^S)$ est le coût incrémental de l'ajout de la demande de l'entité i à celles des entités de S .

2.3 Règle de répartition

Une règle de répartition est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C , spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différentes entités. On note $x_i(Q, C)$ la charge imputée à l'entité i et $x(Q, C)$ la liste de ces dernières :

$$x(Q, C) = (x_1(Q, C), \dots, x_n(Q, C))$$

Une règle de répartition satisfait normalement : $\sum_{i=1}^n x_i(Q, C) = C(Q)$. Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on peut écrire x_i pour $x_i(Q, C)$.

2.4 Exemple

Pour illustrer les définitions qui précèdent et les méthodes de répartition qui vont suivre, on introduit un exemple fictif. Imaginons la construction d'un gazoduc qui relierait le Saguenay-Lac-Saint-Jean et la Beauce à Montréal, en passant par Québec, capable de desservir ces trois régions. On suppose qu'il y a deux périodes dans l'année : l'été et l'hiver. La consommation peut être différente selon la période mais elle est supposée uniforme à l'intérieur d'une même période. On pourrait évidemment augmenter le nombre de périodes pour tenir compte d'un plus grande hétérogénéité dans la consommation. Deux périodes sont cependant suffisantes pour illustrer le propos. Les demandes des trois régions pour chacune des périodes, en mètres cubes, apparaissent dans le tableau qui suit :

| Indice | Région | été | hiver |
|--------|----------|-----|-------|
| 1 | Beauce | 12 | 16 |
| 2 | Saguenay | 9 | 0 |
| 3 | Québec | 25 | 49 |
| | Total | 46 | 65 |

On peut voir le Saguenay comme une région où tous les clients souscrivent à un service interruptible. On leur coupe l'approvisionnement durant l'hiver pour pouvoir desservir complètement les deux autres régions. Il faut donc deux nombres pour décrire la demande de chaque région. Plus précisément, la demande de la région i est décrite par un couple (q_{i1}, q_{i2}) où les indices 1 et 2 représentent respectivement l'été et l'hiver. L'ensemble des demandes est donc donné par la liste qui suit :

$$Q = ((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}), (q_{31}, q_{32})) = ((12, 16), (9, 0), (25, 49)) \quad (1)$$

On suppose que la gaz puisse être acheminé directement de Montréal vers la Beauce ou passer par Québec. Quant au gaz destiné au Saguenay, il doit nécessairement passer par Québec. La configuration possible du réseau est représentée dans la Figure 1. Les lettres M, Q, B et C sont les initiales des villes ou régions concernées.

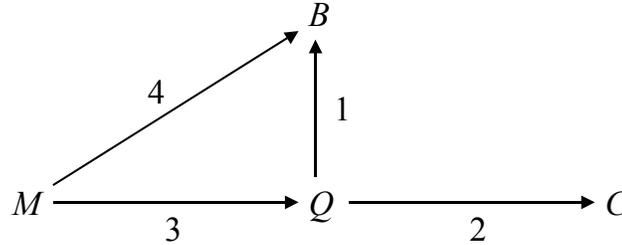


FIGURE 1 – Les sections possibles du réseau

Un gazoduc capable de desservir ces trois régions comprend donc trois ou quatre sections dont les longueurs apparaissent dans le tableau qui suit :

| | Section | longueur |
|---|-----------------|----------|
| 1 | Beauce-Québec | 100 km |
| 2 | Saguenay-Québec | 250 km |
| 3 | Québec-Montréal | 250 km |
| 4 | Beauce-Montréal | 270 km |

Formellement, un réseau peut être représenté par un quadruplet $\alpha(Q) = (\alpha_1(Q), \alpha_2(Q), \alpha_3(Q), \alpha_4(Q))$ dont les éléments spécifient la capacité de chaque segment, en fonction de la demande Q . On suppose que le coût marginal de la capacité d'un conduit est décroissant. Cela implique qu'une seule des sections 1 et 4 doit être utilisée si on veut minimiser les coûts. Selon la demande, la première ou la quatrième composante du quadruplet sera donc nulle. Il y a donc deux façons de répondre aux besoins exprimés, i.e. deux réseaux possibles. On note $\alpha^1(Q)$ le réseau qui ne comprend pas la section 4 et $\alpha^2(Q)$ celui qui ne comprend pas la section 1. Autrement dit, $A(Q) = \{\alpha^1(Q), \alpha^2(Q)\}$.

La capacité du premier réseau possible est donnée par :

$$\alpha^1(Q) = \left(\max\{q_{11}, q_{12}\}, \max\{q_{21}, q_{22}\}, \max\left\{\sum_{i=1}^3 q_{i1}, \sum_{i=1}^3 q_{i2}\right\}, 0 \right) \quad (2)$$

Les capacités sur les tronçons 1 et 2 doivent être suffisantes pour transporter la plus grande quantité demandée respectivement par la Beauce et le Saguenay en cours d'année. De plus, la section Québec-Montréal doit avoir une capacité suffisante pour satisfaire à la demande maximale des trois régions au cours de l'année.

De façon similaire, la capacité du deuxième réseau possible est donnée par :

$$\alpha^2(Q) = \left(0, \max\{q_{21}, q_{22}\}, \max\left\{\sum_{i=2}^3 q_{i1}, \sum_{i=2}^3 q_{i2}\right\}, \max\{q_{11}, q_{12}\} \right)$$

On définit la fonction de coût c d'un réseau de la manière suivante. Pour simplifier les choses, on suppose que les gazoducs soient carrés plutôt que ronds. Pour transporter un volume v , il faut donc un tuyau dont la hauteur et la largeur est égale à \sqrt{v} . Une section de longueur ℓ_s et de capacité α_s va donc exiger une quantité de matériel égale à $4000 \times \ell_s \times \sqrt{\alpha_s}$, en mètres carrés.³ On suppose que le matériel coûte 1 \$ le mètre carré et qu'il s'agit du seul élément de coût. En particulier, les coûts de construction sont les mêmes pour toutes les sections de même taille, peu importe la région. On pourrait facilement avoir des coûts particuliers pour chacune des sections et leur ajouter des coûts fixes. Cela ne changerait pas grand chose aux illustrations qui vont être faites avec cet exemple. Comme les longueurs des trois sections sont respectivement 100, 250, 250 et 270 km, la fonction de coût, en milliers de dollars, est donc définie ainsi. Pour tout réseau $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$:

$$c(\alpha) = 4 \times [100\sqrt{\alpha_1} + 250\sqrt{\alpha_2} + 250\sqrt{\alpha_3} + 270\sqrt{\alpha_4}] \quad (3)$$

Quant à la fonction C , elle est définie par :

$$C(Q) = \min\{c(\alpha_1(Q)), c(\alpha_2(Q))\}$$

³Il faut multiplier par 4 pour les 4 côtés et par 1000 parce qu'il y a 1000 mètres dans un Km.

i.e. par le plus petit des coûts des deux réseaux. Cela donne :

$$C(Q) = \min \left\{ \left[400\sqrt{\max\{q_{11}, q_{12}\}} + 1000\sqrt{\max\{q_{21}, q_{22}\}} + 1000\sqrt{\max\left\{\sum_{i=1}^3 q_{i1}, \sum_{i=1}^3 q_{i2}\right\}} \right], \left[1000\sqrt{\max\{q_{21}, q_{22}\}} + 1000\sqrt{\max\left\{\sum_{i=1}^3 q_{i1}, \sum_{i=1}^3 q_{i2}\right\}} + 1080\sqrt{\max\{q_{11}, q_{12}\}} \right] \right\}$$

Si on applique ces formules à la demande définie en (1), on obtient

$$\alpha^1(Q) = (16, 9, 65, 0)$$

$$\alpha^2(Q) = (0, 9, 65, 16)$$

et

$$c(\alpha^1(Q)) = 12662.26 \quad c(\alpha^2(Q)) = 14320.00$$

ce qui donne : $C(Q) = 12662.26$.

Dans la suite de ce rapport, on suppose qu'il y a un seul réseau possible, soit le réseau $\alpha^1(Q)$. On laisse d'ailleurs tomber l'indice supérieur qui identifie ce réseau. Cela va simplifier les calculs sans altérer la portée des exemples. Tout au plus y aura-t-il augmentation de la part de la Beauce avec les méthodes qui font intervenir le coût de faire cavalier seul. En effet, lorsque la Beauce est seule, il lui en coûterait moins cher de construire un tronçon direct vers Montréal plutôt que de passer par Québec, une possibilité qui est éliminée avec l'abandon de $\alpha^2(Q)$.

3 Les méthodes de répartition

On peut distinguer au moins trois grandes classes de méthodes de répartition des coûts. Elles font l'objet des trois sous-sections qui suivent. Dans la première, on retrouve les méthodes qui consistent à répartir la totalité ou une partie des coûts selon une règle de proportionnalité, à partir de critères plus ou moins ad hoc. Elles sont parfois motivées par certaines

considérations éthiques. On peut multiplier à l’infini ce genre de méthodes en variant la partie des coûts qui font l’objet de la répartition proportionnelle et les critères de cette répartition. Ce sont les plus anciennes de toutes les méthodes de répartition et sans doute celles qui sont encore le plus utilisées. Plusieurs raffinements de ces méthodes ont été suggérées dans des revues de comptabilité, entre autres par Moriarity (1975), Louderback (1976), Balachandran et Ramakrishnan (1981). Elles sont présentées sous le titre de méthodes comptables.

La deuxième catégorie de méthodes est empruntée à la théorie des jeux coopératifs. Dans cette catégorie, on retrouve le concept de coeur, la valeur de Shapley, le nucléole et les tarifs à la Aumann-Shapley. Ces derniers sont donnés par la somme (l’intégrale) des coûts marginaux le long d’un rayon allant de l’origine au point qui représente la demande. L’idée est généralisée à d’autres types de sentier et à des changements discrets.

La troisième catégorie de méthodes est beaucoup plus récente. Elle comprend les règles dites de répartition séquentielle (serial cost sharing). Ce type de règle a été proposé pour la première fois par Shenker (1990) pour les demandes unidimensionnelles. Il a été l’objet d’une abondante littérature depuis. Moulin et Shenker (1992, 1994) en ont fait une analyse extensive. Koster et al. (1998) l’ont étendu au contexte où les agents demandent plusieurs biens privés homogènes. Sprumont (1998) l’a étendu au contexte où chaque agent demande un bien qui lui est spécifique. Têjédo et Truchon (2000 et 2002) poussent la généralisation au contexte multidimensionnel décrit à la section 2.

3.1 Les règles de proportionnalité

Certaines des règles qu’on va examiner font intervenir les éléments de $C(Q)$ qui peuvent être attribués directement aux différentes entités i . On les notera $ca_i(Q)$ et on les appellera *coûts attribuables*. Il ne faut pas confondre ces coûts avec ceux de faire cavalier seul, i.e. $c_i(q_i)$. Ceci nous amène à définir les *coûts communs* par :

$$cc(Q) = C(Q) - \sum_{i=1}^n ca_i(Q)$$

On aura également besoin du *coût incrémental* de desservir l'entité i en plus des autres dans N , lequel est défini par :

$$cm_i(Q) = C(Q) - C(Q^{N \setminus \{i\}})$$

Dans certains cas, on peut avoir $ca_i(Q) = 0$ pour tout i et donc $cc(Q) = C(Q)$. Le tableau qui suit donne ces différents coûts pour l'exemple du gazoduc. Chaque $ca_i(Q)$ est simplement le coût de la section du gazoduc qui est utilisée exclusivement par la région i . Les autres éléments de coût sont calculés à l'annexe C.

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|------------|---------|----------|---------|----------|
| $c_i(q_i)$ | 5600 | 6000 | 7000 | 18600 |
| $ca_i(Q)$ | 1600 | 3000 | 0 | 4600 |
| $cm_i(Q)$ | 2662.30 | 3000 | 3479.68 | |
| $cc(Q)$ | | | | 8062.26 |
| $C(Q)$ | | | | 12662.26 |

Un très grand nombre de méthodes utilisées en pratique et d'autres qui ont été envisagées consistent à exiger une contribution de base xb_i de l'entité i et à répartir le résidu du coût total du projet, une fois soustraites les contributions de base, entre toutes les entités, proportionnellement aux valeurs d'une certaine variable t_i . La formule générale prend donc la forme :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j \right) \quad (4)$$

Il est à noter que le résidu $C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j$ peut être positif ou négatif.

Par le choix des xb_i et des t_i , on peut obtenir autant de règles que l'on veut. En posant $xb_i = 0$ et $t_i = 1$ pour tout i , ce sont les coûts totaux qui sont répartis de façon égalitaire entre les entités :

$$x_i = \frac{1}{n} C(Q)$$

Certaines règles poussent la sophistication jusqu'à décomposer le terme $\left(C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j \right)$ de (4) en plusieurs composantes, disons $\left(C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j \right)_s$, et à répartir chacune de ces

composantes selon un critère t_i^s qui lui est propre. Ainsi, la *Formule du Massachusetts* (Biddle et Steinberg, 1985) consiste à répartir le tiers des coûts communs d'une entreprise entre ses divisions, proportionnellement aux ventes s_i des divisions i , un deuxième tiers proportionnellement aux actifs a_i et le troisième tiers proportionnellement aux nombres d'employés e_i . Cela revient à poser $xb_i = ca_i(Q)$ et à remplacer $\frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j}$ dans (4) par :

$$\left(\frac{s_i}{3 \sum_{j=1}^n s_j} + \frac{a_i}{3 \sum_{j=1}^n a_j} + \frac{e_i}{3 \sum_{j=1}^n e_j} \right)$$

Inutile de dire qu'une telle règle ne possède aucune justification théorique.

3.1.1 La règle du coût moyen

Il s'agit sans doute de la méthode la plus répandue et la plus simple. Elle s'applique à la classe générale de problèmes où les demandes sont homogènes et représentées par des nombres non-négatifs q_i . Elle consiste à répartir les coûts totaux ou une partie des coûts selon les quantités demandées. Chaque entité paie un montant qui est le produit de sa demande et du coût moyen. Autrement dit, elle est tarifée au coût moyen. Cette méthode est définie formellement par :

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} C(Q) = q_i \frac{c\left(\sum_{j=1}^n q_j\right)}{\sum_{j=1}^n q_j} \quad (5)$$

Il s'agit clairement d'un cas particulier de la formule (4).

Cette règle ne peut évidemment pas être utilisée dans le cas des demandes hétérogènes ou multidimensionnelles. Certaines des autres règles de proportionnalité peuvent être vues comme des généralisations de la règle du coût moyen. De façon générale, il s'agit de remplacer les q_i dans (5) par des fonctions numériques h_i de q_i . Cela donne :

$$x_i = \frac{h_i(q_i)}{\sum_{j=1}^n h_j(q_j)} C(Q) \quad (6)$$

Ainsi, on verra que la méthode de Moriarity, présentée ci-dessous, revient à poser $h_i(q_i) = c_i(q_i)$ pour chaque entité, i.e. à répartir le coût total proportionnellement aux coûts de faire cavalier seul. Un autre choix possible pour $h_i(q_i)$ est le coût marginal de la demande de

l'entité i . La *répartition proportionnelle aux coûts marginaux* qui en résulte est présentée de façon formelle à la sous-section 3.2.1.

Dans l'exemple du gazoduc, où les demandes sont multidimensionnelles, on pourrait songer à répartir le coût total en fonction de variables comme la demande de pointe, la demande maximale, la demande moyenne, le coût de faire cavalier seul ou une combinaison de plusieurs de ces critères, i.e. appliquer des critères différents à différentes portions du coût total. Il s'agit d'autant de formes différentes de h_i .

Ces critères sont évidemment arbitraires et il est difficile d'en choisir un plutôt qu'un autre. Alors que la règle de tarification au coût moyen possède des propriétés intéressantes, ce n'est pas le cas d'une règle plus générale comme (6), sauf peut-être pour la répartition proportionnelle aux coûts marginaux. Si on veut une généralisation de la tarification au coût moyen, il faut plutôt regarder du côté de la méthode Aumann-Shapley présentée ci-dessous et qui possède des propriétés intéressantes.

3.1.2 La méthode des bénéfiques résiduels

Cette méthode a été proposée pour répartir les coûts des bassins hydrauliques à usages multiples. Son origine remonte aux travaux de la Tennessee Valley Authority en 1938, bien que cette agence se défendait bien de vouloir utiliser une formule mathématique. La méthode, connue aujourd'hui sous le nom de *méthode des bénéfiques résiduels*, est un raffinement de celle que cette agence avait conçue pour son propre usage. Elle a été utilisée par le Japon, au moins jusqu'en 1985, pour le partage des coûts de ses réservoirs hydrauliques.⁴

La méthode est obtenue en posant $xb_i = c_i(q_i)$ et $t_i = c_i(q_i) - cm_i(Q)$ dans la formule (4), ce qui donne :

$$x_i = c_i(q_i) - \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^n (c_j(q_j) - cm_j(Q))} \left(\sum_{j=1}^n c_j(q_j) - C(Q) \right) \quad (7)$$

Elle consiste à faire payer à chaque entité son coût de faire cavalier seul et à redistribuer le surplus ainsi généré au prorata des différences entre coûts de faire cavalier seul et coûts

⁴À ce sujet, voir Ransmeier (1942) et Okada (1985).

incrémentaux. D'aucuns y ont vu la recherche d'une forme d'équité, ce qui n'est pas évident. Les facteurs de proportionalité n'étant pas définis lorsque $c_i(q_i) = cm_i(Q) \forall i$, on pose alors $x_i = c_i(q_i)$.

Exemple Dans le cas du gazoduc, la méthode des bénéfices résiduels donne la répartition suivante :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3755.69 | 4116.61 | 4789.95 | 12662.26 |
| % | 30 | 32 | 38 | 100 |

3.1.3 Les méthodes comptables

Entre 1975 et 1981, on a vu apparaître des propositions de méthodes de répartition proportionnelle dans des revues de comptabilité. On en a recensé trois, qui sont présentées sous le titre de méthodes comptables.

La première a été proposée par Moriarity (1975). Elle consiste à faire payer une contribution de base qui est égale au plus petit des montants $c_i(q_i)$ et $ca_i(Q) + cc(Q)$, noté w_i , et à redistribuer le surplus qui serait généré de cette façon au prorata des w_i . On l'obtient en posant $xb_i = t_i = w_i$ ou, de façon équivalente, $xb_i = 0$ et $t_i = w_i$ dans (4), ce qui donne :

$$x_i = w_i + \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n w_j \right) = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} C(Q)$$

Dans le cas où $c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tous les i , elle revient à partager le coût total au prorata des $c_i(q_i)$.

Moriarity voyait les quatre avantages suivants à sa méthode : Elle favorise la participation à un projet commun dans la mesure où ce projet peut amener une réduction des coûts totaux. Chaque entité participe à la réduction des coûts totaux. Aucune entité n'est subventionnée par les autres. Elle incite les entités à chercher à minimiser le coût de faire cavalier seul. Il faut cependant noter que, si le coût de faire cavalier seul est une information privée, les entités sont incitées à prétendre que ces coûts sont plus faibles qu'ils ne le sont en réalité.

Exemple Dans le cas du gazoduc, on a $w_i = c_i(q_i)$ pour tout i . La méthode de Moriarity consiste donc à répartir les coûts totaux selon les coûts de faire cavalier seul. Elle donne :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3812.29 | 4084.60 | 4765.37 | 12662.26 |
| % | 30 | 32 | 38 | 100 |

La méthode de Moriarity peut imputer à une entité une contribution inférieure à $ca_i(Q)$, la partie du coût dont elle est directement responsable. On peut donc mettre en doute le deuxième avantage que Moriarity voyait à sa méthode, à savoir qu'aucune entité n'est subventionnée. Tout dépend évidemment de ce que l'on entend par subvention. Il résulte de cette possibilité que les autres entités peuvent avoir intérêt à exclure l'entité subventionnée et à réaliser seules le projet, même en supposant que $cc(Q)$ va rester inchangé après l'exclusion.⁵

Pour remédier à ce défaut de la méthode de Moriarity, Louderback (1976) a proposé de modifier cette dernière en posant $xb_i = ca_i(Q)$ et $t_i = c_i(q_i) - ca_i(Q)$ dans (4), ce qui donne :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^n (c_j(q_j) - ca_j(q_j))} cc(Q)$$

Louderback suppose que $c_i(q_i) \geq ca_i(Q)$, ce qui est assez réaliste. Sa règle consiste à imputer à chaque entité une contribution de base égale aux coûts qui peuvent lui être attribués. On répartit ensuite $cc(Q)$ selon un critère qui donne d'autant plus de poids à une entité que son coût de faire cavalier seul est élevé par rapport aux coûts qui peuvent lui être attribués directement. On fait donc supporter une grande partie de $cc(Q)$ à ceux qui semblent gagner le plus de la réalisation conjointe du projet. Il n'existe plus de subvention d'une entité par une autre et aucun sous-ensemble d'entités n'a intérêt à exclure les autres du projet global. On pose $x_i = ca_i(Q)$ quand $c_i(q_i) = ca_i(Q) \forall i$.

Exemple Dans le cas du gazoduc, la méthode de Louderback donne la répartition suivante :

⁵C'est dans cette perspective que Gangolli (1981) a proposé une extension de la méthode de Moriarity au contexte où des sous-coalitions peuvent se former parmi les entités.

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3903.50 | 4727.63 | 4031.13 | 12662.26 |
| % | 31 | 37 | 32 | 100 |

Balachandran et Ramakrishnan (1981) ont proposé une variante à la méthode de Louderback. Comme dans cette dernière, on pose $xb_i = ca_i(Q)$ dans (4) mais $t_i = w_i - ca_i(Q)$, d'où :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{w_i - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^n (w_j - ca_j(q_j))} cc(Q)$$

On peut observer que

$$w_i - ca_i(Q) = \begin{cases} c_i(q_i) - ca_i(Q) & \text{si } c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q) \\ cc(Q) & \text{si } c_i(q_i) > ca_i(Q) + cc(Q) \end{cases}$$

si bien que, si $c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tout i , comme dans l'exemple du gazoduc, cette méthode donne la même répartition que celle de Louderback. Si, au contraire, $c_i(q_i) > ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tout i , elle donne $x_i = ca_i(Q) + \frac{1}{n}cc(Q)$. On pose $x_i = ca_i(Q)$ quand $w_i = ca_i(Q) \forall i$.

3.2 Les méthodes inspirées de la théorie des jeux coopératifs

Le point de départ des méthodes présentées dans cette section est la théorie des jeux coopératifs. Un jeu est une situation où plusieurs agents inter-agissent ou collaborent entre eux. Beaucoup de comportements économiques tombent dans cette catégorie, au même titre que les jeux proprement dits. L'objet de la théorie des jeux est l'étude de ce genre de situation. On distingue deux sortes de jeux : les jeux non-coopératifs et les jeux coopératifs. C'est à ce dernier type de jeu qu'on s'intéresse.

Un jeu coopératif met en relation un ensemble de joueurs N . Ces joueurs peuvent former des coalitions plus ou moins grandes. Formellement, les coalitions possibles sont les sous-ensembles S de N . Les coalitions obtiennent des gains qui résultent de la coopération de leurs membres. La description d'un jeu coopératif comprend donc une règle g qui définit les

gains $g(S)$ que peuvent réaliser les différentes coalitions S une fois formées. La théorie des jeux coopératifs s'intéresse aux répartitions, i.e. au partage des gains entre les joueurs.

Le problème de la répartition des coûts communs peut être vu comme un jeu coopératif, appelé *jeu de coût*. Les entités de l'ensemble N sont les joueurs. Ils peuvent, par la coopération, réaliser des gains sous forme de réduction de coût. On peut cependant aborder ce jeu sous l'angle de la répartition des coûts plutôt que des gains. C'est l'approche adoptée ici.

Parmi les règles de répartition proposées pour les jeux coopératifs, la plus fréquemment utilisée est celle qu'a définie Shapley (1953), connue sous le nom de *valeur de Shapley*. C'est Shubik (1962) qui a suggéré de l'appliquer aux jeux de coût. Une autre contribution marquante de la théorie des jeux coopératifs est celle de Aumann et Shapley (1974). Ils proposent une généralisation de la méthode Shapley-Shubik au cas où il y a une infinité de joueurs (entités), associés à une infinité de niveaux de production possibles. La méthode Aumann-Shapley consiste à imputer à chaque entité la somme (l'intégrale) des coûts marginaux liés à sa demande le long du rayon qui va de l'origine au point qui représente la demande globale.

On peut imaginer d'autres types de sentier le long desquels calculer et imputer des coûts marginaux ou incrémentaux. Ces différents sentiers donnent lieu à autant de méthodes de répartition de coûts. Par exemple, la règle Shapley-Shubik est une moyenne de somme de coûts incrémentaux associés à un déplacement le long de sentiers constitués de segments de droites parallèles aux différents axes et allant de l'origine au point qui représente la demande globale.

Les méthodes sont présentées dans un ordre qui correspond à des sentiers de plus en plus complexes. Comme la plupart des méthodes font intervenir la notion de coût marginal ou incrémental, on commence par la tarification au coût marginal. On introduit ensuite la méthode Aumann-Shapley. Elle est suivie de la classe plus générale des méthodes de tarification selon les coûts incrémentaux le long d'un sentier quelconque. La méthode Shapley-Shubik suit comme un autre cas particulier de cette catégorie générale. La section se termine avec la présentation d'une autre méthode empruntée à la théorie des jeux coopératifs, soit le nu-

cléole, et avec le concept de coeur qui vient également de cette théorie. Ce dernier est avant tout une propriété des répartitions plutôt qu'une méthode de répartition stricto sensu.

3.2.1 La tarification au coût marginal

On connaît l'importance que les économistes attachent à la tarification au coût marginal. La dernière unité d'un bien ou service devrait être vendue à un prix égal à la valeur des ressources supplémentaires requises pour sa production. C'est une règle qui doit être respectée pour maximiser le profit dans un contexte de concurrence parfaite. C'est aussi ce qu'exige l'utilisation et la répartition efficace des ressources pour l'ensemble de la société, pour autant que les coûts marginaux soient correctement définis. Ce mode de tarification pose cependant problème puisqu'il donne généralement un surplus ou laisse un déficit, sauf en cas de rendement à l'échelle constant.

On examine d'abord l'application de ce principe dans le contexte des demandes unidimensionnelles. Étant donné un vecteur de demandes $Q = (q_1, \dots, q_n)$ et la fonction de coût C , le tarif unitaire appliqué à chaque entité i devrait être égal au coût marginal de sa demande, i.e. au coût additionnel qu'entraîne la dernière unité demandée, en supposant les demandes des autres fixes. Dans le cas où les demandes sont parfaitement divisibles et où la fonction C est différentiable, le coût marginal est la dérivée partielle de C par rapport à son i^e argument, évaluée en Q . On la note $\partial_i C(Q)$. La tarification au coût marginal consiste à demander le montant $q_i \partial_i C(Q)$ à l'entité i .

La même formule est valable pour les demandes multidimensionnelles mais $\partial_i C(Q)$ doit maintenant être interprété comme le vecteur des dérivées partielles de C par rapport aux variables q_{i1}, \dots, q_{im_i} :

$$\partial_i C(Q) = (\partial_{i1} C(Q), \dots, \partial_{im_i} C(Q))$$

Le terme $q_i \partial_i C(Q)$ est donc maintenant le produit scalaire $\sum_{\ell=1}^{m_i} q_{i\ell} \partial_{i\ell} C(Q)$.

Le terme $q_i \partial_i C(Q)$ peut s'exprimer sous une autre forme. Pour un $Q \in \mathfrak{R}_+^{nm}$ et une fonction C donnés, on définit d'abord la fonction $\hat{Q} : [0, 1]^n \rightarrow \mathfrak{R}_+^{nm}$ par :

$$\hat{Q}(\tau) = (\tau_1 q_1, \dots, \tau_n q_n)$$

$\hat{Q}(\tau)$ est un nouveau vecteur de demandes obtenu en réduisant proportionnellement chacune des demandes originales q_i par le facteur τ_i , i.e. en multipliant chaque vecteur q_i par le nombre τ_i . L'argument τ est le vecteur des τ_i . On définit ensuite la fonction $\hat{C} : [0, 1]^n \rightarrow \Re$ par :

$$\hat{C}(\tau) = C\left(\hat{Q}(\tau)\right) = C(\tau_1 q_1, \dots, \tau_n q_n)$$

En toute rigueur, il faudrait écrire $\hat{C}(\tau; Q, C)$ puisque cette fonction dépend évidemment de Q et C . Si les q_i sont des nombres réels (scalaires), cette définition revient simplement à changer les unités dans lesquelles les demandes sont exprimées pour des fractions des demandes originales. Avec des demandes multidimensionnelles, cela revient à se limiter à des changements proportionnels dans la demande de chaque agent. Il n'y a pas de perte de généralité pour autant puisque, en appliquant la règle de différentiation en chaîne, on obtient :

$$\partial_i \hat{C}(\tau) = q_i \partial_i C(\tau_1 q_1, \dots, \tau_n q_n)$$

Avec cette nouvelle définition, la tarification au coût marginal consiste à demander le montant $\partial_i \hat{C}(1, \dots, 1)$ à l'entité i . Cette formulation peut sembler complexe mais un exemple va démontrer la simplicité de son application.

Exemple On considère la demande Q définie en (1) et on multiplie q_i par τ_i pour obtenir :

$$\hat{Q}(\tau) = ((12\tau_1, 16\tau_1), (9\tau_2, 0), (25\tau_3, 49\tau_3))$$

Si on applique les fonctions α et c , définies respectivement par (2) et (3), à $\hat{Q}(\tau)$, on obtient la fonction de coût \hat{C} :

$$\hat{C}(\tau) = 1600\sqrt{\tau_1} + 3000\sqrt{\tau_2} + 1000\sqrt{16\tau_1 + 49\tau_3} \quad (8)$$

Il s'agit ensuite de trouver les dérivées de cette fonction par rapport à chacun des τ_i et de les évaluer pour $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$. Cela donne les charges du tableau qui suit.

Dans le cas présent, ce mode de tarification permet de couvrir uniquement 50% du coût total. Il ne résout donc pas le problème de la répartition du coût total. On pourrait

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|---------|
| x | 1792.28 | 1500.00 | 3038.85 | 6331.13 |

toujours le compléter avec une formule de répartition proportionnelle du déficit ou du surplus qu'implique ce mode de tarification. Autrement dit on pourrait utiliser une règle de la forme :

$$x_i(Q, C) = \partial_i \hat{C}(1, \dots, 1) + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1, \dots, 1) \right)$$

Il s'agit évidemment d'une règle de la forme (4). Appliquée aux données du gazoduc avec $t_i = 1$ pour tous les i (répartition égalitaire du déficit), elle donne les résultats suivants :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3902.65 | 3610.38 | 5149.23 | 12662.26 |
| % | 31 | 29 | 41 | 100 |

Il est difficile de donner une justification théorique à une telle règle. Un autre choix possible, et peut-être plus naturel, est $t_i = \partial_i \hat{C}(1, \dots, 1)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} x_i(Q, C) &= \partial_i \hat{C}(1, \dots, 1) + \frac{\partial_i \hat{C}(1, \dots, 1)}{\sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1, \dots, 1)} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1, \dots, 1) \right) \\ &= \frac{\partial_i \hat{C}(1, \dots, 1)}{\sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1, \dots, 1)} C(Q) = \frac{\partial_i C(Q) q_i}{\sum_{j=1}^n \partial_j C(Q) q_j} C(Q) \end{aligned}$$

i.e. la *répartition proportionnelle aux coûts marginaux*. Cette règle a été analysée par Wang (2002). Nous montrons dans BMT (2002b) qu'elle peut être caractérisée par un ensemble restreint de propriétés, à la manière des règles qui suivent. Appliquée à l'exemple du gazoduc, cette méthode donne la même répartition du coût total que la méthode Aumann-Shapley, vers laquelle on se tourne maintenant. Cela n'est cependant pas vrai de façon générale.

3.2.2 La tarification à la Aumann-Shapley

Aumann et Shapley (1974) ont proposé une solution élégante au problème du surplus ou du déficit qu'implique la tarification au coût marginal. On considère le vecteur $(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)$

où λ est un nombre réel. En faisant varier λ de 0 à 1, on obtient une infinité de telles suites, toutes proportionnelles entre elles. On calcule ensuite le coût marginal de chaque entité pour chaque demande $(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)$, i.e. pour chaque valeur de λ , et on fait la somme de ces coûts marginaux. En utilisant ces sommes comme tarifs unitaires, il n'y a ni surplus ni déficit, du moins s'il n'y a pas de coûts fixes.

En termes mathématiques, la somme de ces coûts marginaux est définie par leur intégrale entre 0 et 1. En multipliant cette intégrale pour l'entité i par la demande q_i , on obtient la part des coûts totaux imputée à l'entité i . Formellement, on a donc :

$$x_i(Q, C) = \int_0^1 q_i \partial_i C(\lambda Q) d\lambda \quad (9)$$

Cette intégrale est en fait la somme des coûts marginaux le long du rayon qui va de l'origine au point Q dans l'espace des demandes. Dans le cas des demandes unidimensionnelles pour un bien privé, cette règle est celle de la tarification au coût moyen.⁶

La formule (9) est également valable pour des demandes multidimensionnelles. Il s'agit d'interpréter $q_i \partial_i C$ comme un produit scalaire. Comme pour les coûts marginaux, on peut mettre la formule (9) sous la forme équivalente :

$$x_i(Q, C) = \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda$$

L'interprétation de la formule sous cette forme est intéressante. Non seulement les demandes de toutes les entités sont-elles réduites de façon proportionnelle dans le processus d'intégration mais, par définition de \hat{C} , le coût marginal de chaque entité est lui-même défini par rapport à des changements proportionnels de tous les éléments de sa demande.

La méthode Aumann-Shapley a été généralisée par Mirman, Samet et Tauman (1983) au cas où il y a un coût fixe CF à partager, le coût total étant alors la somme de ce coût fixe

⁶On a en effet $\partial_i C((\lambda q_1, \dots, \lambda q_n)) = c'(\lambda \sum_{j=1}^n q_j)$ pour tout i , d'où :

$$\int_0^1 q_i \partial_i C(\lambda Q) d\lambda = \int_0^1 q_i c' \left(\lambda \sum_{j=1}^n q_j \right) d\lambda = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} c \left(\sum_{j=1}^n q_j \right) = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} C(Q)$$

et du coût variable CV . La méthode Aumann-Shapley ne procède qu'au partage de CV . On a donc :

$$CV = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda$$

La généralisation proposée par Mirman, Samet et Tauman (1983) consiste à répartir CF proportionnellement aux $\int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda$. La formule exacte s'écrit :

$$x_i(Q, C) = \left(1 + \frac{CF}{CV}\right) \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda$$

Exemple On considère à nouveau la fonction \hat{C} définie dans (8). Il s'agit de dériver cette fonction par rapport à chacun des τ_i , de poser $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \lambda$ et d'intégrer chacune des dérivées par rapport à λ entre 0 et 1. Il n'y a pas de coût fixe ici. Le résultat apparaît dans le tableau qui suit :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3584.56 | 3000.00 | 6077.70 | 12662.26 |
| % | 28 | 24 | 48 | 100 |

La méthode Aumann-Shapley consiste à faire la somme (prendre l'intégrale) des coûts marginaux le long du rayon qui va de l'origine au point Q dans l'espace des demandes. On pourrait cependant faire cette somme le long d'un autre sentier, ce qui donnerait une répartition différente. On peut même imaginer de travailler le long d'un sentier discret (ou linéaire par morceau), ce qui est d'ailleurs la seule façon de procéder lorsque les quantités demandées sont indivisibles. Cette approche plus générale est développée dans l'annexe E.

3.2.3 La méthode Shapley-Shubik

Supposons que la demande totale de l'entité 1 doive être satisfaite avant celle de l'entité 2 et cette dernière avant celle de l'entité 3, etc. Supposons également qu'on convienne de faire supporter à l'entité 1 la totalité du coût de sa demande, soit $c_1(q_1)$, et à l'entité 2 le coût supplémentaire qu'entraîne l'adjonction de sa demande à celle de l'entité 1, soit

$C(q_1, q_2, 0, \dots, 0) - c_1(q_1)$. De façon similaire, l'entité 3 devra supporter $C(q_1, q_2, q_3, 0, \dots, 0) - C(q_1, q_2, 0, \dots, 0)$ et ainsi de suite.⁷

L'ordre d'apparition des entités est évidemment important. Certaines entités pourraient donc contester l'ordre choisi. Shapley (1953) a apporté une réponse élégante à ce conflit. Elle consiste à supposer que l'ordre dans lequel les entités se joignent à une coalition et l'ordre dans lequel les coalitions se forment est aléatoire, avec des chances égales d'arriver premier, deuxième, etc. Si, pour un ordre d'arrivée donné, chacun se voit imputer un montant égal au coût incrémental qu'il impose à la coalition à laquelle il se joint, chacun est alors en mesure de calculer, ex ante, l'espérance du coût qui lui sera imputé. La répartition qui consiste à imputer aux différentes entités un montant égal à cette espérance, autrement dit la moyenne de ces coûts incrémentaux, est appelée *valeur de Shapley*.⁸ On donne le nom de Shapley-Shubik à cette méthode parce que c'est Shubik qui a proposé de l'appliquer à la répartition des coûts.

Avec trois entités, il y a six ordres d'arrivée possibles représentés par autant de suites :

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1)$$

La probabilité est donc $\frac{1}{3}$ que l'entité 1 entre en premier dans le consortium, $\frac{1}{6}$ qu'elle entre en deuxième derrière l'entité 2, $\frac{1}{6}$ qu'elle entre encore en deuxième mais derrière l'entité 3 et $\frac{1}{3}$ qu'elle arrive enfin en troisième, l'ordre dans lequel arrivent les deux autres entités n'ayant alors aucune importance.

Pour définir la méthode Shapley-Shubik, il est commode de poser $\hat{c}(S) = C(Q^S)$. Rappelons-nous que Q^S est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes autres que celle des entités de S sont ramenées à 0. La fonction \hat{c} est définie pour tous les sous-ensembles d'entités. On a en particulier $\hat{c}(\{i\}) = c_i(q_i)$. Cette fonction s'entend pour une demande Q donnée. Elle définit ce qu'on appelle un *jeu de coût*.

⁷Il s'agit de la répartition selon les coûts incrémentaux, décrite dans l'annexe E, avec la suite $\mathbb{Q} = (0, Q^1, \dots, Q^n)$ où $Q^1 = (q_1, 0, \dots, 0)$, $Q^2 = (q_1, q_2, 0, \dots, 0)$, $Q^3 = (q_1, q_2, q_3, 0, \dots, 0)$, \dots , $Q^n = Q$.

⁸Stricto sensu, ce que doit payer le joueur i est la valeur de Shapley du jeu pour ce joueur.

Pour le cas de trois alternatives, la méthode Shapley-Shubik est définie par :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{3}\hat{c}(\{1\}) + \frac{1}{6} [\hat{c}(\{1, 2\}) - \hat{c}(\{2\})] + \frac{1}{6} [\hat{c}(\{1, 3\}) - \hat{c}(\{3\})] + \frac{1}{3} [\hat{c}(\{1, 2, 3\}) - \hat{c}(\{2, 3\})] \\
 x_2 &= \frac{1}{3}\hat{c}(\{2\}) + \frac{1}{6} [\hat{c}(\{1, 2\}) - \hat{c}(\{1\})] + \frac{1}{6} [\hat{c}(\{2, 3\}) - \hat{c}(\{3\})] + \frac{1}{3} [\hat{c}(\{1, 2, 3\}) - \hat{c}(\{1, 3\})] \\
 x_3 &= \frac{1}{3}\hat{c}(\{3\}) + \frac{1}{6} [\hat{c}(\{1, 3\}) - \hat{c}(\{1\})] + \frac{1}{6} [\hat{c}(\{2, 3\}) - \hat{c}(\{2\})] + \frac{1}{3} [\hat{c}(\{1, 2, 3\}) - \hat{c}(\{1, 2\})]
 \end{aligned}$$

On vérifie que $x_1 + x_2 + x_3 = \hat{c}(N) = C(Q)$. De façon plus générale, la répartition par la valeur de Shapley est définie par :

$$x_i = \sum_{S \subset N} \frac{|S \setminus \{i\}|! |N \setminus S|!}{|N|!} [\hat{c}(S) - \hat{c}(S \setminus \{i\})]$$

où $|S|$ représente le nombre d'éléments dans S .

Certains voient ce mode de répartition comme celui qui pourrait résulter d'une négociation entre les entités. Biddle et Steinberg (1985, p. 42) en parlent comme d'un "costless surrogate for the allocation that would be obtained through bargaining."

Une variante consiste à admettre que certaines entités ont une stature telle que les ordres d'entrée dans le consortium ne sont pas équiprobables. Certaines entités devraient en faire partie avant même que d'autres puissent joindre le consortium, ce qui permettrait de représenter leurs pouvoirs de négociation respectifs.

On pourrait aussi appliquer la valeur de Shapley à la répartition des bénéfices tirés de la coopération, i.e. aux coûts épargnés, plutôt qu'aux coûts. Les résultats ne seraient pas nécessairement les mêmes.

S'il y a un coût fixe, on peut le traiter de deux façons. La première consiste à l'inclure dans chacun des $\hat{c}(S)$, ce qui revient à le répartir de façon égalitaire entre toutes les entités. La deuxième consiste à appliquer la méthode Shapley-Shubik aux seuls coûts variables et à répartir le coût fixe selon une règle quelconque, par exemple dans les mêmes proportions que les coûts variables, comme cela a été proposé Mirman, Samet et Tauman (1983) pour la méthode Aumann-Shapley.

Exemple Les valeurs de la fonction \hat{c} pour l'exemple du gazoduc sont les suivantes :

| | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| $\hat{c}(\{1\}) = 5600,$ | $\hat{c}(\{2\}) = 6000,$ | $\hat{c}(\{3\}) = 7000,$ |
| $\hat{c}(\{1, 2\}) = 9182.58,$ | $\hat{c}(\{1, 3\}) = 9662.26,$ | $\hat{c}(\{2, 3\}) = 10000,$ |
| | $\hat{c}(\{1, 2, 3\}) = 12662.26$ | |

Les détails des calculs sont donnés à l'annexe C. Appliquée à ces données, la méthode Shapley-Shubik donne la répartition qui suit :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3728.22 | 4097.10 | 4836.94 | 12662.26 |
| % | 29.4 | 32.4 | 38.2 | 100 |

3.2.4 Le nucléole

Un autre concept emprunté à la théorie des jeux coopératifs est celui de nucléole. L'idée derrière ce concept est de chercher à maximiser le bien-être de la moins heureuse des coalitions.

Étant donné une répartition $x = (x_1, \dots, x_n)$ et un sous-ensemble S non-vide de N et différent de N , on définit l'excédent de la coalition S avec la répartition x par :

$$e(x, S) = \hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Le nombre $e(x, S)$ est ce que gagne la coalition S si elle accepte la répartition x plutôt que de répondre elle-même aux besoins de ses membres. On désigne ensuite par $e(x)$ le vecteur des $(2^n - 2)$ valeurs de $e(x, S)$, pour $S \in \mathcal{N}$, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Le nucléole⁹ est défini comme l'unique répartition x^* qui maximise lexicographiquement $e(x)$:

$$e(x) \leq_{\ell} e(x^*) \text{ pour toute autre répartition } x$$

⁹En toute rigueur, on devrait parler de pré-nucléole, le terme nucléole étant normalement réservé aux répartitions qui satisfont $x_i \leq c(\{i\}) \forall i$, une restriction qu'on n'impose pas. L'exemple présenté à l'annexe D donne justement une répartition qui ne satisfait pas à cette restriction alors que cela aurait été possible.

où \leq_ℓ désigne la relation «inférieure ou égale à au sens lexicographique».¹⁰ Autrement dit, x^* est la répartition qui maximise le plus petit gain d'une coalition, de même que le deuxième plus petit gain, le troisième, etc. C'est aussi le point central, au sens géométrique, de l'ensemble des répartitions possibles.

Exemple Le nucléole¹¹ pour les données du gazoduc est donné par :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3835.70 | 4173.44 | 4653.12 | 12662.26 |
| % | 30 | 33 | 37 | 100 |

Il existe autant de variantes du nucléole que de façons de définir l'excédent d'une coalition. Certains ont proposé de travailler avec l'excédent per capita, i.e. :

$$e(x, S) = \frac{\hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i}{|S|}$$

On obtient alors le nucléole per capita ou le nucléole normalisé.

3.2.5 Le coeur (noyau)

Le coeur n'est pas en soi une méthode de répartition. Il détermine plutôt un ensemble de répartitions des coûts, qui peut d'ailleurs être vide. Il s'agit des répartitions qu'aucune coalition ou sous-ensemble d'entités ne peut contester sous prétexte qu'elles imputeraient à ses membres une charge supérieure au coût auquel la coalition en question pourrait seule satisfaire aux demandes de ses membres. Plus précisément, c'est l'ensemble des répartitions qui satisfont les deux conditions suivantes :

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \hat{c}(S), \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N$$

$$\sum_{i \in N} x_i = \hat{c}(N)$$

¹⁰Un vecteur $e = (e_1, \dots, e_m)$ est *lexicographiquement inférieur* à un autre $d = (d_1, \dots, d_m)$ si la première composante de e différente de la composante correspondante de d est plus petite que cette dernière. Par exemple, $(3, 1, 9)$ est lexicographiquement plus petit que $(3, 2, 1)$.

¹¹Un algorithme pour calculer le nucléole est présenté à l'annexe D.

La première condition spécifie que, quelle que soit la coalition S , la somme des coûts attribués à ses membres ne peut dépasser le coût total $\hat{c}(S)$ auquel cette coalition doit faire face si elle décide de se passer des autres. La deuxième condition stipule que la somme des coûts attribués à toutes les entités doit couvrir exactement le coût total de produire l'ensemble des demandes. Cela laisse supposer que c'est la grande coalition qui va se former.

On peut définir le coeur, de façon équivalente, comme l'ensemble des répartitions qui satisfont les conditions :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq \hat{c}(N) - \hat{c}(N \setminus S), \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}(N) \end{aligned}$$

Sous cette forme, chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \setminus S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition N . Si ce n'était pas le cas, les membres de la coalition $N \setminus S$ verseraient un subside aux membres de la coalition S , d'où une objection possible de leur part.

Il se peut que les conditions qui définissent le coeur soient mutuellement incompatibles. Le coeur est alors vide. Il existe des conditions sur les fonctions de coût qui garantissent l'existence du coeur. Lorsqu'il existe, il peut par contre être très grand. Les conditions d'existence du coeur et ses propriétés sont examinées en détails dans BMT (2002c).

Le coeur est davantage une propriété désirable des diverses méthodes de répartition. Une répartition se trouve ou non dans le coeur. Le fait d'appartenir au coeur confère à une répartition un caractère de crédibilité non négligeable. Par exemple, le nucléole appartient au nucléole lorsque celui-ci existe. La valeur de Shapley appartient au coeur pour les jeux de coûts concaves, i.e. ceux où les coûts incrémentaux de joindre un sous-ensemble d'entités décroît à mesure que ce sous-ensemble augmente en taille. Autrement, l'appartenance au coeur n'est pas garantie. Le nucléole appartient également au coeur lorsque ce dernier n'est pas vide.

Exemple Dans le cas de l'exemple du gazoduc, le coeur est défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 x_1 \leq 5600 & x_2 \leq 6000 & x_3 \leq 7000 \\
 x_1 + x_2 \leq 9182.58 & x_1 + x_3 \leq 9662.26 & x_2 + x_3 \leq 10000 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 12662.26 &
 \end{array}$$

Ainsi, avec une répartition qui appartient au coeur, les entités 1 et 2 ne peuvent se voir imputer des montants supérieurs à respectivement 5600 et 6000 parce qu'elles peuvent fonctionner seules à ces coûts respectifs. De plus, comme elles pourraient, ensemble, répondre à leurs besoins pour un coût total de 9182.58, elles ne peuvent se voir imputer des charges dont le total dépasserait ce montant.

3.3 La répartition séquentielle

La méthode de répartition séquentielle a été conçue originellement pour le cas des demandes portant sur un seul bien privé. On va commencer par présenter la méthode dans ce contexte plus simple. On l'étendra ensuite au contexte plus général décrit dans la sous-section 2.1.

3.3.1 Cas des demandes unidimensionnelles

Les demandes des n entités sont données par des nombres q_i , $i = 1, \dots, n$. On suppose $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$. Typiquement, avec les méthodes de ce type, toutes les entités se voient imputer une part égale du coût d'un projet ou d'une capacité tout juste suffisante pour répondre aux besoins de n entités ayant une demande identique à la plus petite des demandes, celle de l'entité 1 ici. Ensuite, les $n-1$ autres entités se voient imputer, en plus, une part égale de l'accroissement de coût qu'entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle de l'entité 2. On continue ainsi à imputer les coûts associés à des accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes jusqu'à l'entité n .

Dans le cas où les coûts incrémentaux croissent avec l'ampleur des demandes, on évite ainsi que les entités ayant des demandes plus faibles se voient imputer des coûts reliés aux externalités imposées par ceux qui ont des demandes plus fortes. À l'inverse, si les coûts incrémentaux diminuent avec l'ampleur des demandes, on évite que les entités ayant des demandes plus faibles profitent des externalités amenées par ceux qui ont des demandes plus grandes.

Pour décrire cette méthode de façon formelle, on introduit des suites de demande intermédiaire Q^i , $i = 1, \dots, n$, de même dimension que $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Elles sont définies par :

$$q_j^i = \min \{q_i, q_j\}$$

Autrement dit,

$$Q^i = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_i, \underbrace{q_i, \dots, q_i}_{n-i \text{ fois}})$$

Les i premiers éléments de Q^i sont ceux de Q . Les $n - i$ autres sont tous remplacés par q_i . Il ne faut pas confondre Q^i avec $Q^{\{i\}}$. On a évidemment $Q^n = Q$ et on pose $Q^0 = (0, \dots, 0)$.

La méthode de répartition séquentielle est définie par :

$$\begin{aligned} x_1(Q, C) &= \frac{C(Q^1)}{n} \\ x_2(Q, C) &= x_1(Q, C) + \frac{C(Q^2) - C(Q^1)}{n-1} \\ x_3(Q, C) &= x_2(Q, C) + \frac{C(Q^3) - C(Q^2)}{n-2} \\ &\vdots \\ x_n(Q, C) &= x_{n-1}(Q, C) + C(Q) - C(Q^{n-1}) \end{aligned}$$

La formule générale est :

$$x_i(Q, C) = \sum_{j=1}^i \frac{C(Q^j) - C(Q^{j-1})}{n+1-j}, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

Cette méthode satisfait : $\sum_{i=1}^n x_i(Q, C) = C(Q)$. De plus $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. À noter que, s'il y a un coût fixe, cette méthode le répartit également entre toutes les entités dont la demande est positive. Ce coût fixe est en effet compris dans le premier $C(Q^j)$ positif.

Exemple On considère une version simplifiée de l'exemple du gazoduc. On suppose qu'il y a une seule section de réseau, celle de Québec à Montréal, trois clients, tous situés à Québec, et une seule période avec le profil de consommation $Q = (4, 9, 25)$. La fonction α est définie par :

$$\alpha(Q) = \sum_{i=1}^3 q_i$$

d'où $\alpha((4, 9, 25)) = 38$. Les fonctions c et C deviennent $c(\gamma) = 1000\sqrt{\gamma}$, où γ est la capacité de la section, et $C(Q) = 1000\sqrt{\sum_{i=1}^3 q_i}$.

La première étape de la répartition séquentielle requiert la construction des demandes intermédiaires Q^1 et Q^2 . Elles sont données dans le tableau qui suit, avec les valeurs correspondantes des $\alpha(Q^i)$, i.e. les capacités requises pour chaque demande intermédiaire, et $c(\alpha(Q^i)) \equiv C(Q^i)$:

| | 1 | 2 | 3 | $\alpha(Q^i)$ | $c(\alpha(Q^i))$ |
|-------|---|---|----|---------------|------------------|
| Q^1 | 4 | 4 | 4 | 12 | 3464.10 |
| Q^2 | 4 | 9 | 9 | 22 | 4690.42 |
| Q^3 | 4 | 9 | 25 | 38 | 6164.41 |

À noter que $Q^3 = Q$, comme il se doit. Il s'agit ensuite d'appliquer la formule (10) aux coûts de la dernière colonne. Elle donne la répartition suivante¹² :

| | 1 | 2 | 3 | Total |
|-----|---------|---------|---------|---------|
| x | 1154.70 | 1767.86 | 3241.86 | 6164.41 |
| % | 19 | 29 | 53 | 100 |

Par comparaison, la répartition de ces mêmes coûts proportionnellement aux demandes, i.e. la règle du coût moyen, donne la répartition qui suit. On voit que la répartition séquentielle réduit la part du client 3 de façon significative par rapport à la répartition selon le coût moyen. En revanche, celles des clients 1 et 2 sont augmentées. La raison est la suivante. Les

¹²On a : $x_1 = \frac{3464.10}{3}$, $x_2 = \frac{3464.10}{3} + \frac{4690.42-3464.10}{2}$, $x_3 = \frac{3464.10}{3} + \frac{4690.42-3464.10}{2} + \frac{6164.41-4690.42}{1}$

volumes requis par les clients 1 et 2 sont très faibles par rapport à celui requis par le client 3. Ces volumes additionnels peuvent être accommodés avec un gazoduc légèrement plus gros que celui qu'exige le client 3 en isolation. L'accroissement de coût qu'entraînent les demandes des deux autres clients est donc beaucoup plus faible, en termes relatifs, que l'importance de leur demande dans la demande totale. C'est encore plus vrai pour le client 1 que pour le client 2. La règle du coût moyen fait profiter ces deux clients de la baisse du coût moyen qu'amène la demande du client 3. Ce n'est pas le cas avec la répartition séquentielle. Pour établir la part du client 1, on ramène les volumes des deux autres au niveau de celui du client 1. En ce faisant, ce dernier profite de la présence des deux autres mais ne profite pas du fait que leurs demandes soient plus grandes que la sienne. De façon similaire, le client 2 profite de la présence du client 3 mais non de l'importance de sa demande.

| | 1 | 2 | 3 | Total |
|-----|--------|---------|---------|---------|
| x | 648.88 | 1459.99 | 4055.54 | 6164.41 |
| % | 11 | 24 | 66 | 100 |

3.3.2 Cas des demandes multidimensionnelles

On peut envisager une généralisation de la méthode de la sous-section précédente au cas des demandes multidimensionnelles. L'approche présentée ici a été initiée par Koster et al. (1998) pour le cas de plusieurs biens homogènes et par Sprumont (1998) pour les biens hétérogènes. Tèjédo et Truchon (2000) généralisent la méthode au contexte plus général envisagé ici.¹³

Un premier problème qui se présente dans cette démarche est celui d'ordonner des demandes qui ne sont peut-être pas comparables. La solution adoptée consiste à ordonner les demandes en termes des coûts qu'entraînerait leur réalisation indépendante :

$$c_1(q_1) \leq c_2(q_2) \leq \dots \leq c_n(q_n) \tag{11}$$

¹³La méthode de répartition séquentielle peut, elle aussi, être vue comme un cas particulier de répartition selon les coûts incrémentaux, i.e. de la forme (15). On indique comment dans l'annexe F.

Dans le cas unidimensionnel, l'ordre $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ est équivalent à celui établi en (11).

Avec des demandes multidimensionnelles, se pose aussi le problème de la construction des demandes intermédiaires Q^i . Elle ne peuvent évidemment pas l'être comme pour les demandes unidimensionnelles puisque qu'elles peuvent porter sur des biens différents. Cependant, dans le cas unidimensionnel, Q^1 est défini de manière à ce que

$$c_1(q_1) = c_2(q_2^1) = \dots = c_n(q_n^1) \quad (12)$$

Q^2 de manière à ce que

$$c_2(q_2) = c_3(q_3^2) = \dots = c_n(q_n^2) \quad (13)$$

etc. Autrement dit, Q^1 est défini de manière à ce que le coût de faire cavalier seul soit le même pour tous, Q^2 de manière à ce que le coût de faire cavalier seul soit le même pour les entités 2 à n , etc. C'est ce qui est fondamental.

Pour construire Q^1 , il s'agit donc de réduire les demandes des entités 2 à n jusqu'à ce que leur coût de faire cavalier seul soit le même que pour l'entité 1 et ainsi de suite. Il y a cependant plusieurs façons de réduire la demande d'une entité. Ici, on se limite aux réductions proportionnelles, i.e. le long d'une rayon. Têjédo et Truchon (2002) envisagent des réductions le long de sentiers plus généraux. De façon précise, on définit

$$Q^1 = (\tau_1^1 q_1, \dots, \tau_n^1 q_n)$$

où $\tau_1^1 = 1$ et où les autres τ_i^1 sont les solutions des équations :

$$c_i(\tau_i q_i) = c_1(q_1), \quad i = 2, \dots, n$$

De façon similaire, $Q^2 = (\tau_1^2 q_1, \dots, \tau_n^2 q_n)$ où $\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$ et où les autres τ_i^2 sont les solutions des équations

$$c_i(\tau_i q_i) = c_2(q_2), \quad i = 3, \dots, n$$

et ainsi de suite jusqu'à $n - 1$. Comme dans le cas unidimensionnel, on a $Q^n = Q$. Il s'agit ensuite de calculer les $C(Q^j)$, $j = 1, \dots, n$, et de les utiliser dans les fonctions x_i définies en (10).

Exemple On considère à nouveau l'exemple original du gazoduc de la sous-section 2.4. L'ordre original entre les régions respecte l'ordre des coûts de faire cavalier seul $c_i(q_i)$. Il faut commencer par construire les demandes intermédiaires Q^1 et Q^2 . Pour ce faire, il faut trouver, pour $i = 1, 2$ et pour $j > i$, les valeurs des τ_j qui ramènent les demandes des entités j à des niveaux qui font que leur coût soit identique à ceux de q_i . On appelle ces valeurs τ_j^i . Pour obtenir Q^1 , il faut donc résoudre les deux équations :

$$\begin{aligned} c_2(\tau_2 q_2) &\equiv 6000\sqrt{\tau_2} = 5600 \equiv c_1(q_1) \\ c_3(\tau_3 q_3) &\equiv 7000\sqrt{\tau_3} = 5600 \equiv c_1(q_1) \end{aligned}$$

Pour obtenir Q^2 , il faut résoudre l'équation :

$$c_3(\tau_3 q_3) \equiv 7000\sqrt{\tau_3} = 6000 \equiv c_2(q_2)$$

Ces trois solutions apparaissent dans le tableau qui suit :

| τ_j^i | 2 | 3 |
|------------|----------|----------|
| 1 | 0.871111 | 0.64 |
| 2 | — | 0.734694 |

Il faut donc multiplier la demande de l'entité 2 par le facteur 0.871111 et celle de l'entité 3 par le facteur 0.64 pour ramener leurs coûts respectifs à celui de q_1 . Il faut aussi multiplier la demande de l'entité 3 par le facteur 0.734694 pour ramener son coût à celui de q_2 .

En substituant ces valeurs dans

$$\hat{Q}(\tau) = ((12\tau_1, 16\tau_1), (9\tau_2, 0), (25\tau_3, 49\tau_3))$$

on obtient ensuite Q^1 et Q^2 de même que les valeurs correspondantes de α et c :

$$\begin{aligned} Q^1 &= ((12, 16), (7.84, 0), (16, 31.36)) \\ \alpha(Q^1) &= (16, 7.84, 31.36) \\ C(Q^1) &\equiv c(\alpha(Q^1)) = 11281.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^2 &= ((12, 16), (9, 0), (18.3673, 36)) \\
\alpha(Q^2) &= (16, 9, 52) \\
C(Q^2) &\equiv c(\alpha(Q^2)) = 11811.12
\end{aligned}$$

On remarquera la réduction des volumes, par rapport à ceux de Q , dans la deuxième et la troisième composante de Q^1 . Dans Q^2 , seule la dernière diffère de celle Q . Il s'agit ensuite d'appliquer la formule (10) aux coûts ainsi obtenus. Cela donne la répartition suivante :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3760.62 | 4025.24 | 4876.40 | 12662.26 |
| % | 30 | 32 | 39 | 100 |

4 Conclusion

Les méthodes de partage de coûts qui ont été présentées dans ce document ont été illustrées à l'aide d'un même exemple. La tentation pourrait être forte de chercher à choisir une méthode sur la base d'un seul ou même de plusieurs exemples ou sur la base des répartitions qu'elle peut donner dans une situation particulière. C'est malheureusement trop souvent la façon de faire. Il en résulte inévitablement des frustrations et des conflits. C'est souvent le cas lorsqu'arrivent de nouveaux partenaires ou que le contexte change de toute autre manière.

Idéalement, il faudrait choisir une méthode sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner, un peu comme un pays se dote d'une constitution sans connaître toutes les répercussions qu'elle aura sur les citoyens actuels et à venir. Dans BMT (2002b), on cherche à départager les méthodes de partage de coûts sur la base des propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. Certaines d'entre elles concernent la cohérence des règles de répartition. Les autres peuvent être associées à des considérations d'équité. On verra que certaines méthodes peuvent être caractérisées comme étant les seules à satisfaire à un certain sous-ensemble de propriétés.

Annexes

A Sommaire des exemples

Répartition selon la méthode des bénéfices résiduels :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3755.69 | 4116.61 | 4789.95 | 12662.26 |
| % | 30 | 32 | 38 | 100 |

Répartition selon la méthode de Moriarity :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3812.29 | 4084.60 | 4765.37 | 12662.26 |
| % | 30 | 32 | 38 | 100 |

Répartition selon la méthode de Louderback :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3903.50 | 4727.63 | 4031.13 | 12662.26 |
| % | 31 | 37 | 32 | 100 |

Tarification au coût marginal avec répartition égalitaire du déficit :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3902.65 | 3610.38 | 5149.23 | 12662.26 |
| % | 31 | 29 | 41 | 100 |

Répartition à la Aumann-Shapley :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3584.56 | 3000.00 | 6077.70 | 12662.26 |
| % | 28 | 24 | 48 | 100 |

Moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3606.26 | 4732.05 | 4323.95 | 12662.26 |
| % | 28 | 37 | 34 | 100 |

Répartition à la Shapley-Shubik :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3728.22 | 4097.10 | 4836.94 | 12662.26 |
| % | 29.4 | 32.4 | 38.2 | 100 |

Répartition selon le nucléole :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3835.70 | 4173.44 | 4653.12 | 12662.26 |
| % | 30 | 33 | 37 | 100 |

Répartition séquentielle :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3760.62 | 4025.24 | 4876.40 | 12662.26 |
| % | 30 | 32 | 39 | 100 |

B Notation

- Étant donnée une suite de nombres q_1, \dots, q_n , $\sum_{i=1}^n q_i$ représente leur somme.
- Si $N = \{1, 2, \dots, n\}$, i.e. si N est l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, n$, la même somme peut être écrite sous la forme $\sum_{i \in N} q_i$.
- $\max_{i \in N} \{q_i\}$ et $\max \{q_1, \dots, q_n\}$ désignent le plus grand des nombres du vecteur (q_1, \dots, q_n) .

C La fonction \hat{c}

Rappelons-nous la définition de \hat{c} . Pour tout sous-ensemble S de N , on définit d'abord la demande Q^S en annulant les composantes de Q qui correspondent aux entités qui n'appartiennent pas à S . On définit ensuite $\hat{c}(S)$ comme le coût de desservir le sous-ensemble d'entités S , à l'exclusion des autres. Le coût de desservir toutes les entités à la fois est $\hat{c}(N)$. \hat{c} est une fonction définie sur la famille de tous les sous-ensembles non-vides de N . Le lien entre les fonctions \hat{c} , c et C pour l'exemple du gazoduc est le suivant :

$$\begin{aligned}\hat{c}(S) &= C(Q^S) = c(\alpha(Q^S)) \\ \hat{c}(N) &= C(Q) = c(\alpha(Q)) \\ \hat{c}(\{i\}) &= C(Q^{\{i\}}) = c(\alpha(Q^{\{i\}}))\end{aligned}$$

On calcule ensuite les valeurs de $\hat{c}(\{1, 2\})$, $\hat{c}(\{1, 3\})$ et $\hat{c}(\{2, 3\})$. On obtient celle de $\hat{c}(\{1, 2\})$ en appliquant d'abord la règle d'agrégation α à $Q^{\{1, 2\}}$, qui est obtenu en annulant la demande de l'entité 3. Essentiellement, on obtient un gazoduc dont la capacité entre Québec et Montréal est égale à la somme des demandes de la Beauce et du Saguenay, soit 25 mètres cubes. On applique ensuite la fonction de coût c à $\alpha(Q^{\{1, 2\}})$. Le tableau qui suit donne les détails :

$$\begin{aligned}Q^{\{1, 2\}} &= ((12, 16), (9, 0), (0, 0)) \\ \alpha(Q^{\{1, 2\}}) &= (16, 9, 21) \\ \hat{c}(\{1, 2\}) &= C(Q^{\{1, 2\}}) = c(\alpha(Q^{\{1, 2\}})) = 9182.58\end{aligned}$$

On obtient $\hat{c}(\{1, 3\})$ et $\hat{c}(\{2, 3\})$ de façon similaire :

$$\begin{aligned}
Q^{\{1,3\}} &= ((12, 16), (0, 0), (25, 49)) \\
\alpha(Q^{\{1,3\}}) &= (16, 0, 65) \\
\hat{c}(\{1, 3\}) &= C(Q^{\{1,3\}}) = c(\alpha(Q^{\{1,3\}})) = 9662.26 \\
\\
Q^{\{2,3\}} &= ((0, 0), (9, 0), (25, 49)) \\
\alpha(Q^{\{2,3\}}) &= (0, 9, 49) \\
\hat{c}(\{2, 3\}) &= C(Q^{\{2,3\}}) = c(\alpha(Q^{\{2,3\}})) = 10\,000
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
Q^{\{1\}} &= ((12, 16), (0, 0), (0, 0)) \\
\alpha(Q^{\{1,2\}}) &= (16, 0, 16) \\
\hat{c}(\{1\}) &= C(Q^{\{1\}}) = c(\alpha(Q^{\{1\}})) = 5600 \\
\\
Q^{\{2\}} &= ((0, 0), (9, 0), (0, 0)) \\
\alpha(Q^{\{2\}}) &= (9, 0, 9) \\
\hat{c}(\{2\}) &= C(Q^{\{2\}}) = c(\alpha(Q^{\{2\}})) = 6000 \\
\\
Q^{\{3\}} &= ((0, 0), (0, 0), (25, 49)) \\
\alpha(Q^{\{3\}}) &= (0, 0, 49) \\
\hat{c}(\{3\}) &= C(Q^{\{3\}}) = c(\alpha(Q^{\{3\}})) = 7000
\end{aligned}$$

Ces valeurs sont reportées à la page 24.

On peut maintenant calculer le coût incrémental de desservir l'entité i en plus des autres dans N . Il est défini par : $cm_i(Q) = C(Q) - C(Q^{N \setminus \{i\}}) = \hat{c}(N) - \hat{c}(N \setminus \{i\})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
cm_1(Q) &= \hat{c}(N) - \hat{c}(\{2, 3\}) = 12662.26 - 10000.00 = 2662.26 \\
cm_2(Q) &= \hat{c}(N) - \hat{c}(\{1, 3\}) = 12662.26 - 9662.26 = 3000.00 \\
cm_3(Q) &= \hat{c}(N) - \hat{c}(\{1, 2\}) = 12662.26 - 9182.58 = 3479.68
\end{aligned}$$

Ces valeurs et celles de $c_1(q_1) \equiv \hat{c}(\{1\})$, $c_2(q_2) \equiv \hat{c}(\{2\})$ et $c_3(q_3) \equiv \hat{c}(\{3\})$ sont reportées dans le tableau de la page 11.

D Recherche du nucléole

On trouve le nucléole en résolvant une suite de problèmes linéaires définis par :

$$P_k = \begin{cases} \max_{x, \varepsilon} \varepsilon \text{ sous les contraintes} \\ \sum_{i \in S} x_i = \hat{c}(S) - \varepsilon^1 \quad \forall S \in \mathcal{N}_1 \\ \vdots \\ \sum_{i \in S} x_i = \hat{c}(S) - \varepsilon^k \quad \forall S \in \mathcal{N}_k \\ \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon \leq \hat{c}(S) \quad \forall S \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_k) \\ \sum_{j \in N} x_j = \hat{c}(N) \end{cases}$$

Le dual de ce problème¹⁴ s'écrit :

$$D_k = \begin{cases} \min_u \sum_{\kappa=1}^k \sum_{S \in \mathcal{N}_\kappa} u(S) (\hat{c}(S) - \varepsilon^\kappa) + \sum_{S \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_k)} u(S) \hat{c}(S) - u(N) \hat{c}(N) \\ \text{sous les contraintes} \\ \sum_{S \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_k)} u(S) = 1 \\ \sum_{S: i \in S} u(S) = 0 \quad \forall i \in N \\ u(S) \geq 0 \quad \forall S \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_k) \end{cases}$$

Étant donné un couple de solutions $((x^k, \varepsilon^k), u^k)$ des problèmes (P_{k-1}, D_{k-1}) , si

$$\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_{k-1}) \neq \emptyset,$$

on obtient le couple de problèmes (P_k, D_k) en posant

$$\mathcal{N}_k = \{S \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_{k-1}) : u(S) > 0\}.$$

¹⁴On se rapportera à l'annexe D de BMT (2002c) pour un bref rappel sur la programmation linéaire.

Le premier problème primal de cette suite est P_0 :

$$\begin{aligned} & \max_{x, \varepsilon} \varepsilon \text{ sous les contraintes} \\ & \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon \leq \hat{c}(S) \quad \forall S \in \mathcal{N} \\ & \sum_{j \in N} x_j = \hat{c}(N) \end{aligned}$$

Si $((x^1, \varepsilon^1), u^1)$ est un couple de solutions des problèmes (P_0, D_0) , on a $\varepsilon^1 = \max_{x \in X} \min_{S \in \mathcal{N}} e(x, S)$ où $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j \in N} x_j = \hat{c}(N) \right\}$. Autrement dit, ε^1 est le plus grand surplus que la coalition la plus défavorisée peut recevoir. Cependant $e(x^1)$ n'est pas nécessairement le plus grand vecteur de surplus, lexicographiquement parlant. Il se peut qu'il y ait une autre répartition qui améliore le surplus de certaines coalitions parmi celles qui obtiennent ε^1 ou qui améliore le surplus des coalitions qui obtiennent le deuxième meilleur surplus sous x^1 , le troisième meilleur surplus, etc., au détriment des plus grands surplus.

Un théorème fondamental de la programmation linéaire affirme qu'on a $u^1(S) > 0$ seulement si la contrainte correspondante du primal est serrée, i.e. si $\sum_{i \in S} x_i^1 + \varepsilon^1 = \hat{c}(S)$. Comme cela doit être vrai pour tout couple de solutions, on doit également avoir $\sum_{i \in S} x_i^* + \varepsilon^1 = \hat{c}(S)$ pour toute autre solution (x^*, ε^1) du primal. À l'inverse, si $u^1(S) = 0$ pour un S donné, il se peut qu'il y ait une autre solution (x^*, ε^1) qui donne un plus grand surplus à cette coalition. C'est ce qu'on recherche avec les autres problèmes de cette suite, en même temps qu'on cherche à améliorer le deuxième meilleur surplus, le troisième, etc.

La solution x^k du problème P_{k-1} constitue le nucléole si $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \dots \cup \mathcal{N}_k)$ contient au plus une des coalitions $N \setminus \{i\}$, $i \in N$. En effet, si $N \setminus \{i\} \in \mathcal{N}_\kappa$ pour un $i \in N$ et un $\kappa \in \{1, \dots, k\}$, on a $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = \hat{c}(N \setminus \{i\}) - \varepsilon^\kappa$ pour toutes les solutions des problèmes $P_\kappa, P_{\kappa+1}$, etc. En combinant ce fait avec la contrainte $\sum_{j \in N} x_j = \hat{c}(N)$, on a $x_i = \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = \hat{c}(N) - \hat{c}(N \setminus \{i\}) + \varepsilon^\kappa$. Si $n - 1$ de ces contributions sont ainsi déterminées, la n^e l'est également.¹⁵ En vertu de ce critère, il se peut qu'on n'ait pas à résoudre les problèmes (P_k, D_k) même si $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_{k-1}) \neq \emptyset$.¹⁶

¹⁵Ce raisonnement confirme l'unicité du nucléole.

¹⁶Comme on va le voir dans l'exemple qui suit, on pourra dans certains cas s'arrêter plus tôt.

Comme le nombre de coalitions croît de façon exponentielle avec n , il en va de même de la taille des problèmes (P_k, D_k) . La recherche du nucléole peut donc devenir prohibitive si le nombre d'entités devient très grand. Il existe cependant des façons de simplifier cet algorithme pour des classes particulières de problèmes.¹⁷ Entre autres, il suffit de résoudre le dual, qui est plus facile à traiter, jusqu'à ce que le critère d'arrêt qui vient d'être défini soit satisfait. Seule la solution du primal de la dernière étape, celle qui constitue le nucléole, est requise.

L'exemple de la page suivante illustre cet algorithme. On notera que, avec x^1 , on a $e(\{1\}) = e(\{3\}) = e(\{1, 2\}) = \varepsilon^1$. Cependant, comme $u(\{1\}) = 0$, la coalition $\{1\}$ ne fait pas partie de \mathcal{N}_1 . Autrement dit, le surplus de cette coalition n'est pas fixé à ε^1 . Effectivement, il est augmenté de ε^1 à ε^2 à l'itération suivante.¹⁸ On a eu besoin de trois itérations pour satisfaire au critère d'arrêt. Cependant, on aurait pu conclure que x^2 constitue le nucléole du fait que $\{1\}, \{2\}, \{3\} \subset \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. En effet, cela signifie que les valeurs de x_1, x_2 et x_3 ont été déterminées de façon définitive.

E Répartition selon les coûts incrémentaux

L'approche qui est présentée ici s'inspire de Moulin (1999) et de Friedman-Moulin (1999). On considère une suite croissante de demandes $\mathbb{Q} = (Q^0, Q^1, Q^2, \dots, Q^h)$, de même dimension que $Q = (q_1, \dots, q_n)$ et telle que $Q^0 = 0$ et $Q^h = Q$. De plus, pour tout $Q^t \neq Q^h$ de la suite \mathbb{Q} , une et une seule composante $q_i^{t+1} - q_i^t$ de $Q^{t+1} - Q^t$ doit être semi-positive, les autres étant nulles. Dans le cas des demandes scalaires, semi-positif signifie positif. Dans le cas des demandes vectorielles, les composantes de $Q^{t+1} - Q^t$ sont des suites (vecteurs). Une composante $q_i^{t+1} - q_i^t$ est semi-positive si au moins un des éléments de $q_i^{t+1} - q_i^t$ est positif,

¹⁷Voir, entre autres, Granot, Granot et Zhu (1998), de qui nous nous sommes inspirés pour énoncer cet algorithme.

¹⁸Ajouter $\{1\}$ à \mathcal{N}_1 aurait donné $x = (5.0, 5.5, 4.5)$ comme solution finale, avec un vecteur de surplus $e(x) = (-0.5, -0.5, 0., 0.5, 0.5, 1.)$ lexicographiquement plus petit que $e(x^2)$.

| | | |
|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| $\hat{c}(\{1\}) = 5,$ | $\hat{c}(\{2\}) = 6,$ | $\hat{c}(\{3\}) = 4,$ |
| $\hat{c}(\{1, 2\}) = 10,$ | $\hat{c}(\{1, 3\}) = 10,$ | $\hat{c}(\{2, 3\}) = 11,$ |
| | $\hat{c}(\{1, 2, 3\}) = 15$ | |

| | x_1 | x_2 | x_3 | ε |
|------------------------|-------|-------|-------|---------------|
| (x^1, ε^1) | 5.5 | 5.0 | 4.5 | -0.5 |
| (x^2, ε^2) | 4.75 | 5.75 | 4.5 | 0.25 |
| (x^3, ε^3) | 4.75 | 5.75 | 4.5 | 0.75 |

| | $u(\{1\})$ | $u(\{2\})$ | $u(\{3\})$ | $u(\{1, 2\})$ | $u(\{1, 3\})$ | $u(\{2, 3\})$ | $u(\{1, 2, 3\})$ |
|-------|------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|------------------|
| u^1 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | -0.5 |
| u^2 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 |
| u^3 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | -1 |

| | |
|-----------------|----------------------|
| \mathcal{N}_1 | $\{3\}, \{1, 2\}$ |
| \mathcal{N}_2 | $\{1\}, \{2\}$ |
| \mathcal{N}_3 | $\{1, 3\}, \{2, 3\}$ |

| | $e(\{1\})$ | $e(\{2\})$ | $e(\{3\})$ | $e(\{1, 2\})$ | $e(\{1, 3\})$ | $e(\{2, 3\})$ |
|-------|------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|
| x^1 | -0.5 | 1 | -0.5 | -0.5 | 0 | 1.5 |
| x^2 | 0.25 | 0.25 | -0.5 | -0.5 | 0.75 | 0.75 |
| x^3 | 0.25 | 0.25 | -0.5 | -0.5 | 0.75 | 0.75 |

| Vecteurs de surplus ordonnés | |
|------------------------------|--|
| $e(x^1)$ | $(-0.5, -0.5, -0.5, 0, 1, 1.5)$ |
| $e(x^2)$ | $(-0.5, -0.5, 0.25, 0.25, 0.75, 0.75)$ |
| $e(x^3)$ | $(-0.5, -0.5, 0.25, 0.25, 0.75, 0.75)$ |

Tableau 1 – Exemple de calcul du nucléole

les autres étant non-négatifs. On écrit $q_i^{t+1} - q_i^t > 0$ pour indiquer que la composante est semi-positive.

Pour tout $Q^t \neq Q^h$ de la suite \mathbb{Q} , on définit ensuite :

$$\Delta_i^{\mathbb{Q}} C (Q^t) = \begin{cases} C (Q^{t+1}) - C (Q^t) & \text{si } q_i^{t+1} - q_i^t > 0 \\ 0 & \text{si } q_i^{t+1} - q_i^t = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$\Delta_i^{\mathbb{Q}} C (Q^t)$ est le *coût incrémental* pour i de passer de Q^t à Q^{t+1} . Ce coût est imputé à une seule entité, celle qui est responsable de l'accroissement de la demande.

On vérifie facilement que la règle suivante est une règle de répartition des coûts :

$$x_i(Q, C) = \sum_{t=0}^{h-1} \Delta_i^{\mathbb{Q}} C (Q^t) \quad (15)$$

On a en effet :

$$\sum_{i=1}^n x_i(Q, C) = \sum_{t=0}^{h-1} \sum_{i=1}^n \Delta_i^{\mathbb{Q}} C (Q^t) = \sum_{t=0}^{h-1} [C (Q^{t+1}) - C (Q^t)] = C (Q)$$

De plus, $x_i(Q, C) \geq 0$.

La formule (15) est la *règle de répartition selon les coûts incrémentaux* correspondant à la suite \mathbb{Q} . Chaque suite \mathbb{Q} définit évidemment une règle différente.

Un cas particulier, pour les demandes unidimensionnelles, consiste à définir une suite $\mathbb{Q} = (0, Q^1, \dots, Q^h)$ telle que $Q^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $Q^2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $Q^3 = (1, 1, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $Q^n = (1, \dots, 1)$, $Q^{n+1} = (2, 1, \dots, 1)$, $Q^{n+2} = (2, 2, 1, \dots, 1)$, etc., avec la restriction qu'aucune composante des éléments de la suite ne peut dépasser la composante correspondante de Q . Les éléments qui violeraient cette restriction sont tout simplement omis de cette suite. En somme, les entités sont servies à tour de rôle, dans l'ordre où elles sont indexées, jusqu'à ce que leur demande soit complètement satisfaite. Ce cas particulier peut être généralisé au cas des demandes multidimensionnelles. À tour de rôle, on augmente d'une unité les composantes de chaque entité qui sont inférieures à sa demande et ce jusqu'à l'obtention des demandes de toutes les entités.

La règle de répartition qui résulte de cette suite de demandes s'apparente à celle de Aumann-Shapley. Dans le cas où le sentier est confondu avec le rayon allant de l'origine

au point Q et où les unités des biens sont infiniment petites, cette règle est effectivement celle de Aumann-Shapley. Sinon, une règle de répartition par les coûts incrémentaux peut donner des résultats différents de ceux auxquels conduit la règle de Aumann-Shapley lorsque la fonction de coût est différentiable.

Exemple Dans le cas de l'exemple du gazoduc, on considère une suite où les régions sont servies successivement selon l'ordre Beauce, Saguenay, Québec et où elles reçoivent une unité supplémentaire pour les deux périodes, chaque fois que c'est leur tour, mais sans jamais dépasser leurs demandes totales. Formellement :

$$\begin{aligned}
 Q^1 &= ((1, 1), (0, 0), (0, 0)) \\
 Q^2 &= ((1, 1), (1, 0), (0, 0)) \\
 Q^3 &= ((1, 1), (1, 0), (1, 1)) \\
 Q^4 &= ((2, 2), (1, 0), (1, 1)) \\
 Q^5 &= ((2, 2), (2, 0), (1, 1)) \\
 &\vdots \\
 Q^{74} &= ((12, 16), (9, 0), (25, 49))
 \end{aligned}$$

On remarque que le Saguenay ne reçoit jamais rien en deuxième période parce que sa demande pour cette période est nulle. La règle de répartition selon les coûts incrémentaux correspondant à cette suite donne la répartition suivante :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 4096.57 | 4564.19 | 4001.49 | 12662.26 |
| % | 32 | 36 | 32 | 100 |

Elle est fort différente de celle obtenue avec la méthode Aumann-Shapley. On pourrait attribuer cette différence à l'ordre dans lequel les régions sont servies. La répartition suivante est la moyenne des répartitions obtenues avec les six ordres possibles entre les régions :

| | Beauce | Saguenay | Québec | Total |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| x | 3606.26 | 4732.05 | 4323.95 | 12662.26 |
| % | 28 | 37 | 34 | 100 |

Cette répartition est elle aussi très différente de celle obtenue avec la méthode Aumann-Shapley. Pour se rapprocher davantage de la méthode Aumann-Shapley, il faudrait définir une suite qui soit le plus près possible du rayon allant de l'origine à Q . Avec la suite utilisée, on se déplace d'abord à peu près à 45° par rapport aux axes, i.e. on sert toutes les entités sur à peu près la même base, puis on bifurque vers le point final Q , i.e. on sert ceux dont la demande est la plus forte. Les derniers déplacements se font parallèlement à certains des axes.

F Répartition séquentielle et coûts incrémentaux

La méthode de répartition séquentielle peut être vue comme un cas particulier de répartition selon les coûts incrémentaux. Elle peut être mise sous la forme (15), à condition de modifier la définition de $\partial_i C$. Manifestement, le sentier le long duquel les $\partial_i C$ doivent être évalués est défini par $\mathbb{Q} = (0, Q^1, \dots, Q^h)$ où les Q^i sont les demandes intermédiaires définies plus haut. Quant à $\partial_i C$, il s'agit de le redéfinir comme suit, avec $Q^0 = 0$:

$$\Delta_i^{\mathbb{Q}} C(Q^{j-1}) = \begin{cases} \frac{C(Q^j) - C(Q^{j-1})}{n+1-j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n$$

En remplaçant $\frac{C(Q^j) - C(Q^{j-1})}{n+1-j}$ par $\Delta_i^{\mathbb{Q}} C(Q^{j-1})$ dans (10) à la page 29, on peut faire la sommation jusqu'à n plutôt que jusqu'à i , ce qui donne :

$$x_i(Q, C) = \sum_{j=1}^n \Delta_i^{\mathbb{Q}} C(Q^{j-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_i^{\mathbb{Q}} C(Q^j), \quad i = 1, \dots, n$$

Il s'agit de la formule (15) de la page 43.

Dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, i.e. lorsque α est de la forme $\alpha(Q) = \sum_{i=1}^n q_i$, la règle de répartition séquentielle peut aussi être définie par l'intégrale du

coût marginal de chaque entité le long du sentier continu Γ constitué des segments de droite $[0, Q^1], [Q^1, Q^2], \dots, [Q^{h-1}, Q^h]$. De façon précise :

$$x_i(Q, C) = \int_{\Gamma} \partial_i C(Q)$$

où $\partial_i C(Q)$ désigne maintenant la dérivée partielle de C au point Q . Par exemple, sur le segment $[0, Q^1]$, la portion de cette intégrale est définie par :

$$\int_0^{Q^1} \partial_i C(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda$$

ce qui donne $\sum_{i=1}^n \int_0^{Q^1} \partial_i C(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda = C(Q^1)$. Comme toutes les entités sont traitées de façon symétrique, on a donc :

$$\int_0^{Q^1} \partial_i C(\lambda, \dots, \lambda) d\lambda = \frac{C(Q^1)}{n}$$

Sur le segment $[Q^1, Q^2]$, la portion de l'intégrale est définie par :

$$\int_{Q^1}^{Q^2} \partial_i C(q_1, \lambda, \dots, \lambda) d\lambda$$

ce qui donne $\int_{Q^1}^{Q^2} \partial_1 C(q_1, \lambda, \dots, \lambda) d\lambda = 0$, vu que q_1 est considéré comme fixe. On a donc :

$$\sum_{i=2}^n \int_{Q^1}^{Q^2} \partial_i C(q_1, \lambda, \dots, \lambda) d\lambda = C(Q^2) - C(Q^1)$$

Comme les entités 2 à n sont traitées de façon symétrique, on a :

$$\int_{Q^1}^{Q^2} \partial_i C(q_1, \lambda, \dots, \lambda) d\lambda = \frac{C(Q^2) - C(Q^1)}{n-1}$$

Et ainsi de suite.

Références

- Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Biddle, G.C. et Steinberg, R., 1985. “Common Cost Allocation in the Firm,” in *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, ed. by H. P. Young, North Holland, 31-54.
- Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon 2002a. “Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence”, CIRANO 2002RP-17.
- Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon 2002b. “Les méthodes de partage de coûts : propriétés”, CIRANO 2002RP-19.
- Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon 2002c. “Les jeux de coûts : principaux concepts de solution”, CIRANO 2002RP-21.
- Balanchandran, B. et Ramakrishnan, 1981. “Joint Cost Allocation : a Unified Approach,” *Accounting Review*, 56, 85-96.
- Friedman, E. et Moulin, H. (1999). “Three Methods to Share Joint Costs or surplus”, *Journal of Economic Theory*, 87, pp 275-312.
- Gangolly, J.S., 1981. “On Joint Cost allocation : Independent Cost Proportional Scheme (ICPS) et its Properties,” *Journal of Accounting Research*, 19, 299-312.
- Granot, D., Granot, F. et W.R. Zhu, 1998. “Characterization Sets for the Nucleolus,” *International Journal of Game Theory*, 27, 359-74.
- Koster, M., Tijs, S., et Borm, P, 1998. “Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations,” *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.
- Louderback, J.G., 1976. “Another Approach to Allocating Joint Costs : A Comment,” *Accounting Review*, 50, 683-85.
- Mirman, L.J., D. Samet et Y. Tauman, 1983 “ An Axiomatic Approach to the Allocation of a Fixed Cost through Prices,” *Bell Journal of Economics*, 14, 139-151.
- Moriarity, S., 1975. “Another Approach to Allocating Joint Costs,” *Accounting Review*, 49, 791-795.
- Moulin, H. et S. Shenker, 1992. “Serial Cost Sharing,” *Econometrica*, 50, 5, 1009-1039.

- Moulin, H. et S. Shenker, 1994. "Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing : an axiomatic comparison," *Journal of Economic Theory*, 64, 1, 178-201.
- Moulin, H., 1999. "Incremental Cost Sharing : Characterization by Strategyproofness," *Social Choice and Welfare*, 16, 279-320.
- Okada, N., 1985. "Cost Allocation in Multipurpose Reservoir Development : The Japanese Experience," in *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, ed. by H.P. Young, North Holland, 3-29.
- Ransmeier, J.S., 1942. *The Tennessee Valley Authority : A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning*, Nashville, TN : Vanderbilt University Press.
- Schmeidler, D., 1969. "The Nucleolus of a Characteristic Function Game," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.
- Shapley, L.S., 1953. "A Value for n-Person Games," in Kuhn, H., et W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.
- Shenker, S., 1990. "Making Greed Work in Networks : A Game-Theoretic Analysis of Gateway Service Disciplines," Mimeo, Xerox Research Center, Palo Alto.
- Shubik, M., 1962. "Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing," *Management Science*, 8, 325-43.
- Sprumont, Y., 1998. "Ordinal cost sharing," *Journal of Economic Theory*, 81, 126-162.
- Téjédo, C. et M. Truchon, 2000. "Serial Cost Sharing with Many Goods and General Aggregation," Cahier de recherche 0007, Département d'économique, Université Laval.
- Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. "Serial Cost Sharing in Multidimensional Contexts," *Mathematical Social Science*, 44, 277-299.
- Young, H.P., 1994. "Cost Allocation", in *R.J.Aumann et S. Hart, eds, Handbook of Game Theory, Vol. II*, Amsterdam : North Holland, Chap. 34, 1191-1235.
- Wang, Y.T., 2002. "Proportionally Adjusted Marginal Pricing Method to Share Join Costs," *Review of Economic Design*, 7, 205-211.

Documents * CIRANO *

sur

Le partage des coûts communs et la tarification des infrastructures

<http://www.cirano.qc.ca/publications/>

- [1] 2002RP-17 Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence
- [2] 2002RP-18 Les méthodes de partage de coûts : un survol
- [3] 2002RP-19 Les méthodes de partage de coûts : propriétés
- [4] 2002RP-20 Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions
- [5] 2002RP-21 Les jeux de coûts : principaux concepts de solution
- [6] 2003RP-04 Le cas des réseaux municipaux souterrains
- [7] 2003RP-05 Partage des coûts dans l'entreprise et incitations
- [8] 2003RP-06 Tarification optimale des infrastructures communes